

# 問題1

## 【解答】

|      |              |              |              |              |              |              |              |
|------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| (1)  | <div>ア</div> | <div>イ</div> | <div>ウ</div> | <div>エ</div> | <div>オ</div> | <div>カ</div> | <div>キ</div> |
|      | 5            | 4            | 9            | 9            | 4            | 1            | 2            |
| (2)  | <div>ク</div> | <div>ケ</div> |              |              |              |              |              |
|      | 5            | 2            |              |              |              |              |              |
| (3)  | <div>コ</div> | <div>サ</div> | <div>シ</div> |              |              |              |              |
|      | 1            | 4            | 3            |              |              |              |              |
| (4)  | <div>ス</div> | <div>セ</div> | <div>ソ</div> |              |              |              |              |
|      | 5            | 0            | 5            |              |              |              |              |
| (5)  | <div>タ</div> | <div>チ</div> |              |              |              |              |              |
|      | 1            | 6            |              |              |              |              |              |
| (6)  | <div>ツ</div> | <div>テ</div> |              |              |              |              |              |
|      | 1            | 6            |              |              |              |              |              |
| (7)  | <div>ト</div> | <div>ナ</div> | <div>ニ</div> |              |              |              |              |
|      | 0            | 1            | 2            |              |              |              |              |
| (8)  | <div>ヌ</div> | <div>ネ</div> | <div>ノ</div> | <div>ハ</div> | <div>ヒ</div> | <div>フ</div> |              |
|      | 7            | 2            | 7            | 7            | 2            | 7            |              |
| (9)  | <div>ヘ</div> | <div>ホ</div> |              |              |              |              |              |
|      | 3            | 8            |              |              |              |              |              |
| (10) | <div>マ</div> | <div>ミ</div> | <div>ム</div> | <div>メ</div> | <div>モ</div> |              |              |
|      | 1            | 5            | 2            | 1            | 0            |              |              |

## 【解説】

- (1)  

$$\begin{cases} A=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28\} \\ B=\{4,7,10,13,16,19,22,25,28\} \end{cases}$$
である。また、 $2023=7\cdot 17^2$ であるから  

$$\overline{C}=\{7,14,17,21,28\}$$
である。よって、ド・モルガンの法則を用いることにより  

$$\begin{cases} A\cap B=\{4,10,16,22,28\} \\ \overline{A}\cap B=\{7,13,19,25\} \\ \overline{A}\cap \overline{B}=\{3,5,9,11,15,17,21,23,27\} \\ \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap \overline{B}=\{3,5,9,11,15,17,21,23,27\} \\ A\cap B\cap C=\{4,10,16,22\} \\ A\cap B\cap \overline{C}=\{28\} \\ A\cup B\cup \overline{C}=\overline{A}\cap \overline{B}\cap \overline{C}=\{17,21\} \end{cases}$$
を得る。よって  

$$\begin{cases} n(A\cap B)=5 \\ n(\overline{A}\cap B)=4 \\ n(\overline{A}\cap \overline{B})=9 \\ n(\overline{A\cup B})=9 \\ n(A\cap B\cap C)=4 \\ n(A\cap B\cap \overline{C})=1 \\ n(\overline{A\cup B\cup \overline{C}})=2 \end{cases}$$
と求められる。
- (2)  

$$\begin{aligned} \lim_{x\rightarrow\infty}\left(x^2-x\sqrt{x^2-5}\right) &= \lim_{x\rightarrow\infty}\frac{\left(x^2-x\sqrt{x^2-5}\right)\left(x^2+x\sqrt{x^2-5}\right)}{x^2+x\sqrt{x^2-5}} \\ &= \lim_{x\rightarrow\infty}\frac{x^4-x^2\left(x^2-5\right)}{x^2+x\sqrt{x^2-5}} \\ &= \lim_{x\rightarrow\infty}\frac{5x^2}{x^2+x\sqrt{x^2-5}} \\ &= \lim_{x\rightarrow\infty}\frac{5}{1+\sqrt{1-\frac{5}{x^2}}} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$
と求められる。
- (3)  
 $\frac{dy}{dx}=3\sqrt{x}$ であるから、求める曲線の長さは  

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{5}{3}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx &= \int_0^{\frac{5}{3}}\sqrt{1+9x}dx \\ &= \left[\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}(1+9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{5}{3}} \\ &= \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}(64-1) \\ &= \frac{14}{3} \end{aligned}$$
である。
- (4)  
ド・モアブルの定理より  

$$\begin{aligned} (1+i)^n &= \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^n \\ &= (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right) \\ (1-i)^n &= \left[\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\right]^n \\ &= (\sqrt{2})^n\left\{\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right\} \\ &= (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right) \end{aligned}$$
と計算できる。よって  

$$\begin{aligned} (1+i)^n &= (1-i)^n \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right) &= (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n\cdot 2i\cdot\sin\frac{n\pi}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin\frac{n\pi}{4} &= 0 \end{aligned}$$
と変形できる。したがって、正の整数 $k$ を用いて  

$$\frac{n\pi}{4}=k\pi\Leftrightarrow n=4k$$
が成り立つ。 $1\leq n\leq 2023$ より  

$$1\leq 4k\leq 2023$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\leq k\leq \frac{2023}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1\leq k\leq 505$$
を得る。したがって、求める $n$ は505個ある。
- (5)  

$$f'(x)=\frac{1}{\tan 4x}\cdot\frac{4}{\cos^2 4x}=\frac{4}{\sin 4x\cos 4x}=\frac{8}{\sin 8x}$$
と計算できる。よって、 $x=\frac{\pi}{48}$ における微分係数は  

$$f'\left(\frac{\pi}{48}\right)=\frac{8}{\sin\frac{\pi}{6}}=16$$
と求められる。
- (6)  

$$\alpha=\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{5}+1$$
より  

$$\alpha-1=\sqrt{5}$$
である。両辺2乗すると  

$$\alpha^2-2\alpha+1=5\Leftrightarrow\alpha^2-2\alpha-4=0$$
となる。よって  

$$\alpha^3-\alpha^4-12\alpha^3+12\alpha^2+16\alpha=\left(\alpha^3+\alpha^2-6\alpha+4\right)\left(\alpha^2-2\alpha-4\right)+16=16$$
と求められる。
- (7)  

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left\{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right\}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{6}}f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)dx$$
である。第2項について、 $x=\frac{\pi}{6}-t$ とおくと  

$$dx=-dt$$
であり、 $x$ と $t$ の対応は下のようになる。

|     |                 |               |                 |
|-----|-----------------|---------------|-----------------|
| $x$ | 0               | $\rightarrow$ | $\frac{\pi}{6}$ |
| $t$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\rightarrow$ | 0               |

よって  

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^0f(t)(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(t)dt$$
となるから  

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left\{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right\}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(t)dt=0\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$
と計算できる。また、 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ 、 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ より  

$$f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)}{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)}=\frac{\cos^3(3x)}{\cos^3(3x)+\sin^3(3x)}$$
と変形できる。よって  

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}}\left\{f(x)+f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right\}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}}\left\{\frac{\sin^3(3x)}{\cos^3(3x)+\sin^3(3x)}+\frac{\cos^3(3x)}{\cos^3(3x)+\sin^3(3x)}\right\}dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}}dx \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$
を得る。①+②を計算することにより  

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}}\left\{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right\}dx &+ \int_0^{\frac{\pi}{6}}\left\{f(x)+f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right\}dx = \frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(x)dx &= \frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{6}}f(x)dx &= \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$
と求められる。
- (8)  
3個のサイコロの目の出方は $6^3=216$ (通り)存在し、これらは同様に確からしい。また、出た目をそれぞれ $a, b, c$ とする。ただし、 $a, b, c$ は $1\leq a\leq 6, 1\leq b\leq 6, 1\leq c\leq 6$ をみたす整数である。このとき、 $a+b+c\leq 8$ をみたす $a, b, c$ の組の個数を考える。 $9-(a+b+c)=d$ とおくと  

$$a+b+c+d=9\qquad\cdots\cdots\textcircled{3}$$
であり、 $a+b+c\leq 8$ より  

$$9-d\leq 8\Leftrightarrow d\geq 1$$
である。よって、求める組の個数は、③をみたす整数 $a, b, c, d$ ( $1\leq a\leq 6, 1\leq b\leq 6, 1\leq c\leq 6, d\geq 1$ )の組の個数に等しい。ここで、③をみたす整数 $a$ が存在すると仮定すると、 $b+c+d\leq 2$ でなければならず、これは $b\geq 1, c\geq 1, d\geq 1$ に矛盾する。よって、整数 $a, b, c, d$ が③をみたすとき、 $a\leq 6$ である。同様に、 $b\leq 6, c\leq 6$ が得られる。したがって、求める組の個数は、③をみたす整数 $a, b, c, d$ ( $a\leq 1, b\leq 1, c\leq 1, d\geq 1$ )の組の個数である。これは、9個の○の間に3個の仕切り $|$ を入れる並べ方の総数に等しく、  

$${}_8C_3=56$$
(通り)
である。ゆえに、求める確率は  

$$\frac{56}{216}=\frac{7}{27}$$
である。次に、  

$$abc\leq 12\qquad\cdots\cdots\textcircled{4}$$
をみたす整数 $a, b, c$ の組の個数を考える。 $a$ の値により場合分けをして、 $b, c$ の組を考える。ここで、 $b, c$ の積の値は次のようである。

|                |   |    |    |    |    |    |
|----------------|---|----|----|----|----|----|
| $b\setminus c$ | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| 1              | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| 2              | 2 | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 |
| 3              | 3 | 6  | 9  | 12 | 15 | 18 |
| 4              | 4 | 8  | 12 | 16 | 20 | 24 |
| 5              | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| 6              | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |

[1]  $a=1$ のとき  
④すなわち $bc\leq 12$ をみたす整数 $b, c$ の組の個数は、上の表より23組ある。  
[2]  $a=2$ のとき  
④すなわち $bc\leq 6$ をみたす整数 $b, c$ の組の個数は、上の表より14組ある。  
[3]  $a=3$ のとき  
④すなわち $bc\leq 4$ をみたす整数 $b, c$ の組の個数は、上の表より8組ある。  
[4]  $a=4$ のとき  
④すなわち $bc\leq 3$ をみたす整数 $b, c$ の組の個数は、上の表より5組ある。  
[5]  $a=5$ のとき  
④すなわち $bc\leq \frac{12}{5}$ をみたす整数 $b, c$ の組の個数は、上の表より3組ある。  
[6]  $a=6$ のとき  
④すなわち $bc\leq 2$ をみたす整数 $b, c$ の組の個数は、上の表より3組ある。  
以上より、④をみたす整数 $a, b, c$ の組の個数は56組である。ゆえに、求める確率は  

$$\frac{56}{216}=\frac{7}{27}$$
である。
- (9)  

$$\begin{aligned} x^2-9x+20 &< 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)(x-5) &< 0 \\ \Leftrightarrow 4 &< x < 5 \end{aligned}$$
である。また、  

$$\begin{aligned} x^2-2(k-1)x+k^2-2k-8 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \{x-(k-4)\}\{x-(k+2)\} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow k-4 &\leq x\leq k+2 \end{aligned}$$
である。よって、与えられた命題は  

$$4 < x < 5 \Rightarrow k-4 \leq x \leq k+2$$
と同値である。よって、これが真となる $k$ の範囲は  

$$k-4\leq 4 \text{かつ} 5\leq k+2 \Leftrightarrow 3\leq k\leq 8$$
である。
- (10)  
 $a_1=S_1$ より  

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}\left(a_1+\frac{1^3}{a_1}\right) \\ \Leftrightarrow a_1^2-1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a_1-1)(a_1+1) &= 0 \end{aligned}$$
と計算できる。 $a_1>0$ であるから $a_1=1$ である。このとき  

$$\begin{aligned} a_2 &= S_2-S_1 \\ &= \frac{1}{2}\left(a_2+\frac{2^3}{a_2}\right)-a_1 \\ &= \frac{1}{2}\left(a_2+\frac{8}{a_2}\right)-1 \\ \Leftrightarrow a_2^2+2a_2-8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a_2-2)(a_2+4) &= 0 \end{aligned}$$
と計算できる。 $a_2>0$ であるから $a_2=2$ である。さらに  

$$\begin{aligned} a_3 &= S_3-S_2 \\ &= \frac{1}{2}\left(a_3+\frac{3^3}{a_3}\right)-\left(a_1+a_2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(a_3+\frac{27}{a_3}\right)-3 \\ \Leftrightarrow a_3^2+6a_3-27 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a_3-3)(a_3+9) &= 0 \end{aligned}$$
と計算できる。 $a_3>0$ であるから $a_3=3$ である。以上より、 $a_n=n$ と推測できるため、数学的帰納法を利用して  

$$a_n=n\qquad\cdots\cdots\textcircled{5}$$
であることを示す。  
[1]  $n=1$ のとき  
 $a_1=1$ より成り立つ。  
[2]  $n=k$ のとき⑤が成り立つ、すなわち  

$$a_k=k$$
と仮定する。このとき  

$$S_k=\frac{1}{2}k(k+1)$$
である。この仮定のもとに、 $n=k+1$ のとき  

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= S_{k+1}-S_k \\ &= \frac{1}{2}\left\{a_{k+1}+\frac{(k+1)^3}{a_{k+1}}\right\}-\frac{1}{2}k(k+1) \\ \Leftrightarrow a_{k+1}^2+k(k+1)a_{k+1}-(k+1)^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{a_{k+1}-(k+1)\}\{a_{k+1}+(k+1)^2\} &= 0 \end{aligned}$$
と計算できる。 $a_{k+1}>0$ であるから $a_{k+1}=k+1$ である。よって、 $n=k+1$ のときにも⑤が成り立つ。  
以上、[1],[2]より、すべての自然数 $n$ について⑤は成り立つ。したがって、すべての自然数 $n$ について  

$$S_n=\frac{1}{2}n(n+1)$$
である。ゆえに  

$$S_5=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6=15, S_{20}=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 21=210$$
と求められる。

## 問題 2

(1)

$f(x)$  の逆関数が  $g(x)$  であるから

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy \\ &= \int_a^b x \frac{dy}{dx} dx \\ &= \int_a^b x f'(x) dx \\ &= [x f(x)]_a^b - \int_a^b f(x) dx \\ &= b f(b) - a f(a) - S_1 \\ \therefore S_1 + S_2 &= b f(b) - a f(a) \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad S_1 + S_2 = b f(b) - a f(a)$$

(2)

$y = \sqrt{\sqrt{1+x}-1}$  とし、両辺 2 乗すると

$$y^2 = \sqrt{1+x}-1 \Leftrightarrow y^2+1 = \sqrt{1+x}$$

と変形できる。さらに両辺 2 乗すると

$$y^4 + 2y^2 + 1 = 1+x \Leftrightarrow x = y^4 + 2y^2$$

であるから、 $f(x) = \sqrt{\sqrt{1+x}-1}$  の逆関数  $g(x)$  は

$$g(x) = x^4 + 2x^2$$

と求められる。ここで、区間  $3 \leq x \leq 99$  において  $f(x) > 0$  であるから、(1) の結果より

$$\int_3^{99} f(x) dx + \int_{f(3)}^{f(99)} g(x) dx = 99 \cdot f(99) - 3 \cdot f(3)$$

である。これに  $f(99) = \sqrt{\sqrt{1+99}-1} = 3$ ,  $f(3) = \sqrt{\sqrt{1+3}-1} = 1$  を代入すると

$$\int_3^{99} \sqrt{\sqrt{1+x}-1} dx + \int_1^3 (x^4 + 2x^2) dx = 99 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで

$$\int_1^3 (x^4 + 2x^2) dx = \left[ \frac{1}{5} x^5 + \frac{2}{3} x^3 \right]_1^3 = \frac{986}{15}$$

と計算できるから

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \int_3^{99} \sqrt{\sqrt{1+x}-1} dx = 297 - 3 - \frac{986}{15} = \frac{3424}{15}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad \int_3^{99} \sqrt{\sqrt{1+x}-1} dx = \frac{3424}{15}$$

(3)

$y = \sqrt{\frac{4}{x}-1}$  とし、両辺 2 乗すると

$$y^2 = \frac{4}{x}-1 \Leftrightarrow y^2+1 = \frac{4}{x}$$

となる。 $y^2+1 \neq 0$  であるから

$$x = \frac{4}{y^2+1}$$

と変形できる。よって  $f(x) = \sqrt{\frac{4}{x}-1}$  の逆関数  $g(x)$  は

$$g(x) = \frac{4}{x^2+1}$$

と求められる。ここで、区間  $1 \leq x \leq 3$  において  $f(x) > 0$  であるから、(1) の結果より

$$\int_1^3 f(x) dx + \int_{f(1)}^{f(3)} g(x) dx = 3 \cdot f(3) - 1 \cdot f(1)$$

である。これに  $f(3) = \sqrt{\frac{4}{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $f(1) = \sqrt{\frac{4}{1}-1} = \sqrt{3}$  を代入すると

$$\int_1^3 \sqrt{\frac{4}{x}-1} dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4}{x^2+1} dx = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \cdot \sqrt{3} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。ここで、 $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4}{x^2+1} dx$  について、 $x = \tan \theta$  と置換すると

$$dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

であり、 $x$  と  $\theta$  の対応は下のようになる。

|          |                 |               |                      |
|----------|-----------------|---------------|----------------------|
| $x$      | $\sqrt{3}$      | $\rightarrow$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| $\theta$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\rightarrow$ | $\frac{\pi}{6}$      |

したがって

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4}{x^2+1} dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{4}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= 4 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} d\theta \\ &= 4 \left[ \theta \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \\ &= -\frac{2}{3} \pi \end{aligned}$$

と計算できるから

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \int_1^3 \sqrt{\frac{4}{x}-1} dx = \sqrt{3} - \sqrt{3} - \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4}{x^2+1} dx = \frac{2}{3} \pi$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad \int_1^3 \sqrt{\frac{4}{x}-1} dx = \frac{2}{3} \pi$$

### 問題 3

(1)

2つの格子点を結ぶ線分が、 $y$  軸に平行であるか、平行でないかで場合分けする。

[1] 2つの格子点を結ぶ線分が  $y$  軸に平行であるとき

この線分上の点の  $x$  座標は整数である。一方、 $e$  点の  $x$  座標は無理数であるため、この線分上にはない。

[2] 2つの格子点を結ぶ線分が  $y$  軸に平行でないとき

2つの格子点の座標は、整数  $m_1, m_2, n_1, n_2$  を用いて、それぞれ  $(m_1, n_1), (m_1 + m_2, n_1 + n_2)$

と表せる。このとき、この線分の傾きは  $\frac{n_2}{m_2}$  であり、これは有理数である。一方、点

$(m_1, n_1)$  とある  $e$  点  $(p, q)$  を結ぶ線分を考える。ただし、 $p$  は無理数、 $q$  は有理数である。

このとき、この線分の傾きは  $\frac{n_1 - q}{m_1 - p}$  であり、これは無理数である。したがって、2つの格

子点  $(m_1, n_1), (m_1 + m_2, n_1 + n_2)$  を結ぶ線分の傾きと点  $(m_1, n_1)$  と  $e$  点  $(p, q)$  を結ぶ線分の傾きは、 $p, q$  の値によらず一致しない。

以上、[1], [2] より、2つの格子点を結ぶ任意の線分は  $e$  点を通らないことが示された。

(証明終)

(2)

整数  $m, n$  を用いて、4点  $(m, n), (m+1, n), (m, n+1), (m+1, n+1)$  を頂点とする正方形を考え

る。この内部にある  $e$  点は、点  $\left(m+3-e, n+\frac{1}{2}\right), \left(m-2+e, n+\frac{1}{2}\right)$  の2個である。

(答) 2個

(3)

整数  $m_1, n_1, m_2, n_2$  を用いて、3点  $(m_1, n_1), (m_1 + m_2, n_1), (m_1, n_1 + n_2)$  を頂点とする直角三角形

の面積について考える。ここで、4点  $(m_1, n_1), (m_1 + m_2, n_1), (m_1, n_1 + n_2), (m_1 + m_2, n_1 + n_2)$  を

頂点とする長方形を考えると、これは1辺の長さが1の正方形を  $m_2 n_2$  個合わせたものであ

る。よって、(2)の結果を用いると、この長方形の内部にある  $e$  点の個数は  $2m_2 n_2$  個である。

また、(1)の結果より、2点  $(m_1 + m_2, n_1), (m_1, n_1 + n_2)$  を結ぶ線分上には  $e$  点は存在しない。し

たがって、直角三角形の内部にある  $e$  点の個数は、長方形の内部にある  $e$  点の個数の半分、す

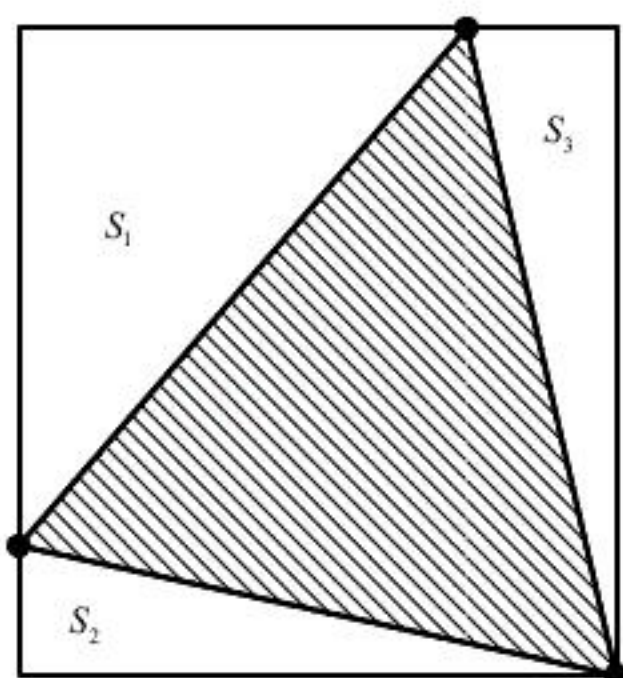
なわち  $m_2 n_2$  個である。一方、この直角三角形の面積は  $\frac{1}{2} m_2 n_2$  である。ゆえに、直角三角形の

面積は、この三角形の内部にある  $e$  点の個数の  $\frac{1}{2}$  に等しいことが示された。

(証明終)

(4)

3つの格子点を頂点とする三角形を下図のように考えても一般性を失わない。



上図のように、斜線部の三角形は、長方形から3つの直角三角形を除いた図形である。また、

長方形の面積を  $S$ 、3つの直角三角形の面積をそれぞれ  $S_1, S_2, S_3$  とする。このとき、長方形

の内部にある  $e$  点の個数は、(2)の結果を利用することにより、 $2S$  個である。また、(3)の結果

を利用することにより、面積  $S_1, S_2, S_3$  の直角三角形の内部にある  $e$  点の個数はそれぞれ、 $2S_1$

個、 $2S_2$  個、 $2S_3$  個である。さらに、(1)の結果より、2つの格子点を結ぶ任意の線分上には  $e$

点は存在しない。以上より、斜線部の三角形の内部にある  $e$  点の個数は  $2S - 2S_1 - 2S_2 - 2S_3$  個

である。一方、斜線部の三角形の面積は、 $S - S_1 - S_2 - S_3$  と表せる。したがって、3つの格子

点を頂点とする任意の三角形の面積は、この三角形の内部にある  $e$  点の個数の  $\frac{1}{2}$  に等しいこ

とが示された。

(証明終)

(5)

3つの格子点を頂点とする正三角形が存在すると仮定する。整数  $m_1, n_1, m_2, n_2, m_3, n_3$  を用い

て、3点  $(m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3)$  を頂点とする正三角形を考える。この正三角形の1辺の長

さは  $\sqrt{(m_2 - m_1)^2 + (n_2 - n_1)^2}$  であるから、その面積は  $\frac{\sqrt{3}}{4} \{(m_2 - m_1)^2 + (n_2 - n_1)^2\}$  と表せる。よ

って、(4)の結果より、この正三角形の内部にある  $e$  点の個数は  $\frac{\sqrt{3}}{2} \{(m_2 - m_1)^2 + (n_2 - n_1)^2\}$  個で

なければならない。しかし、 $m_1, n_1, m_2, n_2$  は整数であるから、 $(m_2 - m_1)^2 + (n_2 - n_1)^2$  も整数で

ある。したがって、 $\frac{\sqrt{3}}{2} \{(m_2 - m_1)^2 + (n_2 - n_1)^2\}$  は無理数であるから、これが正三角形の内部

にある  $e$  点の個数であることに矛盾する。ゆえに、3つの格子点を頂点とする正三角形は存

在しない。

(証明終)