

1 x に関する 2 次方程式

$$x^2 - 2ax + b(1 - b) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

について、次の問に答えよ。ただし、 a, b は実数とする。

- (1) 方程式①が、実数解をもつための、 a, b の満たすべき条件を求めよ。
- (2) 上で求めた条件を満たす点(a, b)の存在する領域を図示せよ。
- (3) 方程式①が重解をもつとき、 $4a + 3b$ のとる値の範囲を求めよ。

2

複素数 α が, $\alpha^3 = -4 + \sqrt{11}i$ を満たすとする. $c = \alpha + \bar{\alpha}$ とおくとき, 次の問に答えよ. ただし, $\bar{\alpha}$ は α に共役な複素数とする.

- (1) 絶対値 $|\alpha|$ の値を求めよ.
- (2) $c^3 - 9c$ の値を求めよ.
- (3) c のとりうる値をすべて求めよ.

3 放物線： $y = \frac{1}{2}x^2$ 上の点 $P(1, \frac{1}{2})$ における接線を l とする. いま, l が円 $C: (x - \frac{5}{2})^2 + y^2 = r^2$ に点 $Q(a, b)$ で接しているとき, 次の問に答えよ. ここで, 原点を O とし, 円 C の中心を A , 線分 OA と円 C との交点を R と表す.

- (1) a, b および円 C の半径 r を求めよ.
- (2) 放物線の点 O から点 P までの部分, 線分 PQ , 短い方の円弧 QR および線分 OR とで囲まれた部分の面積を求めよ.

4

自然数 n について、 $2x + y = n$ を満たす自然数 x, y を考える。ただし、 $n \geq 3$ とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) 3 辺の長さが、 x, x, y である二等辺三角形が作れるとき、

$$\frac{n}{4} < x < \frac{n}{2}$$

が成り立つことを示せ。

- (2) 3 辺の長さが、 x, x, y である二等辺三角形が作れるような自然数の組 (x, y) の総数を a_n とおく。 $a_3 = 1$ である。

このとき、自然数 k に対して、 $a_{4k}, a_{4k+1}, a_{4k+2}, a_{4k+3}$ をそれぞれ k を用いて表せ。