

1

(1)

S_3 は一辺の長さが $\frac{1}{3}$ の正三角形の面積だから、三平方の定理を用いて、

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{36} \end{aligned}$$

である。 S_4 は一辺の長さが $\frac{1}{4}$ の正方形の面積だから、

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

である。 S_6 は一辺の長さが $\frac{1}{6}$ の正六角形の面積であり、これは一辺の長さが $\frac{1}{6}$ の正三角形を

6つ合わせたものと考えられるから、

$$\begin{aligned} S_6 &= 6 \times \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \sin 60^\circ \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{24} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S_3 = \frac{\sqrt{3}}{36}, S_4 = \frac{1}{16}, S_6 = \frac{\sqrt{3}}{24}$$

(2)

$$\begin{aligned} S_4 - S_3 &= \frac{1}{16} - \frac{\sqrt{3}}{36} \\ &= \frac{\sqrt{81} - \sqrt{48}}{144} > 0 \end{aligned}$$

であるから、 $S_4 > S_3$ である。

$$(\text{答}) \quad S_4 > S_3$$

(3)

$$\begin{aligned} S_6 - S_4 &= \frac{\sqrt{3}}{24} - \frac{1}{16} \\ &= \frac{\sqrt{12} - \sqrt{9}}{48} > 0 \end{aligned}$$

であるから、 $S_6 > S_4$ である。

$$(\text{答}) \quad S_6 > S_4$$

(4)

与式の分母を有理化すると、

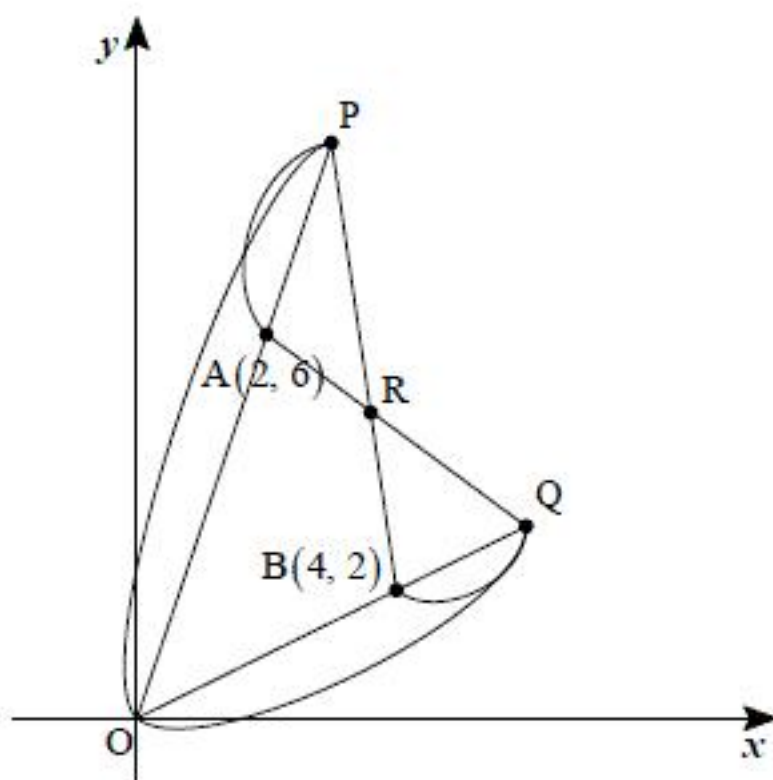
$$\begin{aligned} \frac{S_6 - S_4}{S_4 - S_3} &= \frac{\frac{2\sqrt{3}-3}{48}}{\frac{9-4\sqrt{3}}{144}} \\ &= 3 \cdot \frac{2\sqrt{3}-3}{9-4\sqrt{3}} \cdot \frac{9+4\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}} \\ &= 3 \cdot \frac{6\sqrt{3}-3}{33} \\ &= \frac{6\sqrt{3}-3}{11} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{6\sqrt{3}-3}{11}$$

(1)

各点の位置は以下の図の通りである。



三角形 OBP と線分 AQ においてメネラウスの定理より、

$$\frac{OA}{AP} \cdot \frac{PR}{RB} \cdot \frac{BQ}{QO} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1} \cdot \frac{PR}{RB} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$\therefore PR:RB = 3:2$$

である。

(答) $PR:RB = 3:2$

(2)

図形の対称性を考慮すると、三角形 OAQ と線分 BP においてメネラウスの定理より、

$QR:RA = 3:2$ である。△APR、△BQR の面積をそれぞれ S_1 、 S_2 とおき、 S_1 を S_2 の定数倍で表すことを目指す。∠ARP と ∠BRQ は対頂角であるから、 $\angle ARP = \angle BRQ = \theta$ とおくと、

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \cdot PR \cdot RA \cdot \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} RB \cdot \frac{2}{3} QR \cdot \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot QR \cdot RB \cdot \sin \theta \\ &= S_2 \end{aligned}$$

である。よって $S_1:S_2 = 1:1$ である。

(答) 1:1

(1)

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^n (a_k + 2) \quad \cdots (*)$$

が全ての自然数 n について成り立っている。これに $n=1$ を代入して、

$$\begin{aligned} a_2 &= \sum_{k=1}^1 (a_k + 2) \\ &= a_1 + 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

である。

(答) $a_2 = 3$

(2)

$n \geq 2$ のとき、 $(*)$ より、

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k + 2)$$

が成り立つ。 $(*)$ から上式を引くことで、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=1}^n (a_k + 2) - \sum_{k=1}^{n-1} (a_k + 2) \\ &= a_n + 2 \end{aligned}$$

が得られるから、 $n \geq 2$ のとき $a_{n+1} = 2a_n + 2$ は成り立つ。

(証明終)

(3)

(2)で得られた漸化式 $a_{n+1} = 2a_n + 2$ の特性方程式 $\alpha = 2\alpha + 2$ を解くと、 $\alpha = -2$ である。これを用いて、この漸化式は $a_{n+1} + 2 = 2(a_n + 2)$ と変形できる。これより、 $n \geq 2$ のとき数列 $\{a_n + 2\}$ は公比 2 の等比数列とわかるから、その一般項は、

$$\begin{aligned} a_n + 2 &= 2^{n-2} \cdot (a_2 + 2) \\ &= 5 \cdot 2^{n-2} \\ \therefore a_n &= 5 \cdot 2^{n-2} - 2 \end{aligned}$$

である。これは $n=1$ のとき成り立たない。

$$(答) \begin{cases} a_1 = 1 & (n=1 \text{ のとき}) \\ a_n = 5 \cdot 2^{n-2} - 2 & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(A)

(1)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2x} \cdot 2 \cdot x - \log 2x \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \log 2x}{x^2}$$

より、増減表は以下の通りである。

x	1	...	$\frac{e}{2}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$

増減表より、 $x = \frac{e}{2}$ のとき $f(x)$ は最大値 $\frac{2}{e}$ をとる。

(答) $x = \frac{e}{2}$ のとき最大値 $\frac{2}{e}$

(2)

(1)より $a = \frac{e}{2}$ である。ここで、

$$\begin{aligned}\{(\log 2x)^2\}' &= 2 \cdot \log 2x \cdot \frac{2}{2x} \\ &= 2 \cdot \frac{\log 2x}{x}\end{aligned}$$

であることを考慮すると、定積分は

$$\begin{aligned}\int_1^{\frac{e}{2}} f(x) dx &= \frac{1}{2} \cdot \int_1^{\frac{e}{2}} 2 \cdot \frac{\log 2x}{x} dx \\&= \frac{1}{2} \cdot \left[(\log 2x)^2 \right]_1^{\frac{e}{2}} \\&= \frac{1}{2} \{1 - (\log 2)^2\}\end{aligned}$$

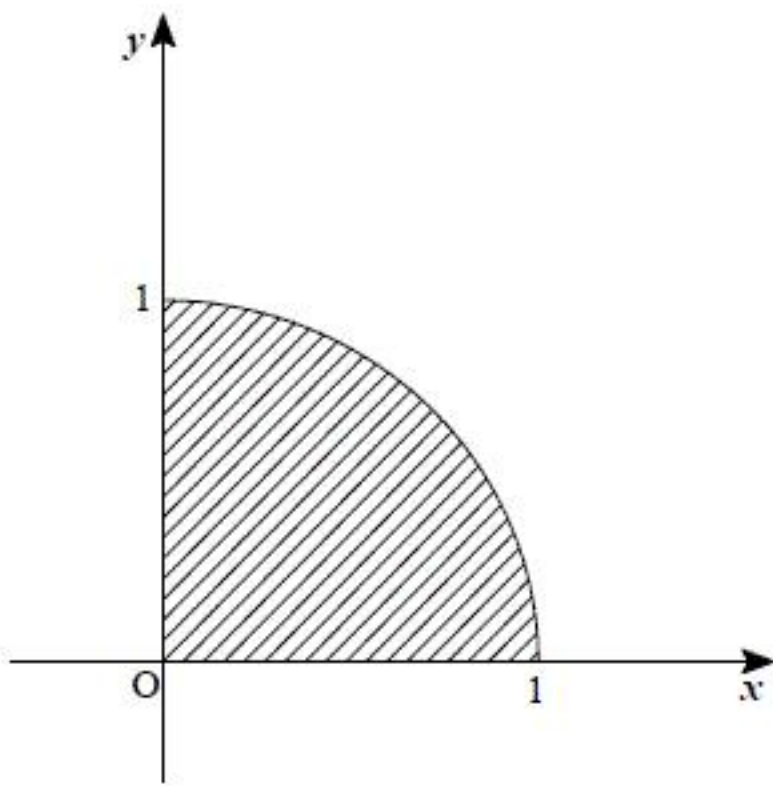
である。

(答) $\frac{1}{2}\{1-(\log 2)^2\}$

(B)

(1)

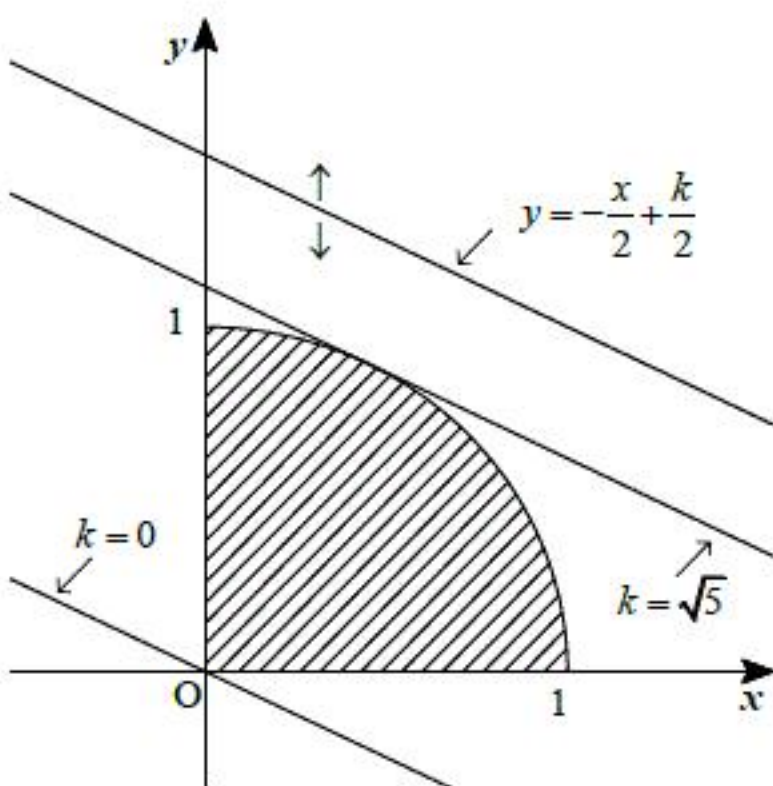
条件を満たす (x, y) の存在する領域を D とする。これを図示すると以下の通りである。ただし境界線を含む。



ここで、 $x+2y=k$ とおくと $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ より $k \geq 0$ である。 k が存在するためには、直線 $x+2y=k$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{x}{2} + \frac{k}{2} \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

と領域 D が共通部分を持てばよい。この値を変化させて、直線と領域の位置関係を調べる。



[1] k が最大値をとるとき

これは円

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

と①が $x \geq 0, y \geq 0$ の範囲で接するときである。①を②に代入して、

$$x^2 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{k}{2}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4}x^2 - \frac{k}{2}x + \frac{k^2}{4} - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

という2次方程式を得る。この方程式の判別式が0となればよいから

$$\frac{k^2}{4} - 4 \cdot \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{k^2}{4} - 1 \right) = 0$$

$$\therefore k = \sqrt{5} \quad (\because k \geq 0)$$

である。また、このときの x, y の値は③に $k = \sqrt{5}$ を代入して $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ である。

[1] k が最小値をとるとき

これは①が原点を通るときだから、 $k=0$ であり、このときの x, y の値は $(x, y)=(0, 0)$ である。

(答) $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ のとき最大値 $\sqrt{5}$, $(x, y) = (0, 0)$ のとき最小値 0

(2)

(1)より t の変域は $0 \leq t \leq \sqrt{5}$ である。

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3t^2 - 1 \\ &= (\sqrt{3}t + 1)(\sqrt{3}t - 1) \end{aligned}$$

であるから、増減表は以下の通りである。

t	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	$\sqrt{5}$
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$4\sqrt{5}$

以上より、 $f(t)$ は $t=\sqrt{5}$ のとき最大値 $4\sqrt{5}$ 、 $t=\frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき最小値 $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ をとる。

(答) $t = \sqrt{5}$ のとき最大値 $4\sqrt{5}$, $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最小値 $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$