

1

(1)

$f(x)$ を微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 6x^2 - 4x + 6 \\ &= 2x^2(2x-3) - 2(2x-3) \\ &= 2(x^2-1)(2x-3) \\ &= 2(x+1)(x-1)(2x-3) \end{aligned}$$

と因数分解できるから、増減表は以下の通りとなる。

x	...	-1	...	1	...	$\frac{3}{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{45}{16}$	$\nearrow$

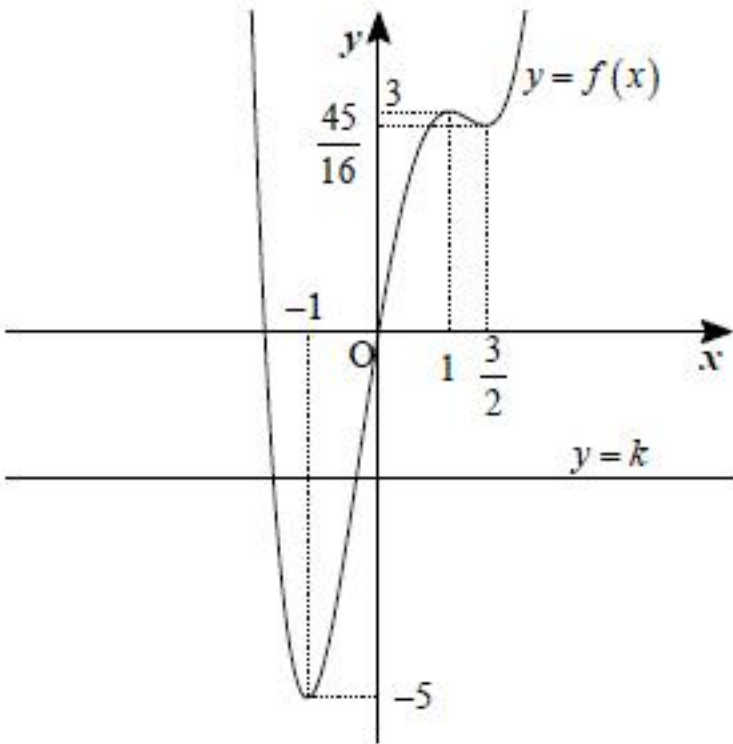
したがって、増減表より $f(x)$ は $x=-1$ のとき極小値 -5 、 $x=1$ のとき極大値 3 、 $x=\frac{3}{2}$ のとき

極小値 $\frac{45}{16}$ をそれぞれとる。

(答) $x=1$ のとき極大値 3 、 $x=-1$ のとき極小値 -5 、 $x=\frac{3}{2}$ のとき極小値 $\frac{45}{16}$

(2)

(1)の増減表より、 $y=f(x)$ のグラフは以下の通りとなる。



方程式 $f(x)=k$ の実数解の個数は、 $y=f(x)$ と $y=k$ のグラフの交点の数に等しい。 k の値を変化させて交点の個数を調べると以下のようなになる。

$$\left\{ \begin{array}{ll} k < -5 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ k = -5 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ -5 < k < \frac{45}{16}, k > 3 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ k = \frac{45}{16}, 3 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ \frac{45}{16} < k < 3 \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \end{array} \right.$$

(答) 前表

(1)

P は C 上の点なので、その座標は実数 α を用いて

$$P(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$$

とおける。ただし $0 \leq \alpha < 2\pi$ とする。このとき、条件より Q の座標は

$$Q(-\cos \alpha, -\sin \alpha, 0)$$

とおけるから

$$\overrightarrow{AP} = (\cos \alpha - 1, \sin \alpha - 1, -1)$$

$$\overrightarrow{AQ} = (-\cos \alpha - 1, -\sin \alpha - 1, -1)$$

である。これらの内積は、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} &= -(\cos \alpha - 1)(\cos \alpha + 1) - (\sin \alpha - 1)(\sin \alpha + 1) + 1 \\ &= -\cos^2 \alpha + 1 - \sin^2 \alpha + 1 + 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 2$$

(2)

まず $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ の大きさを求めると、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AP}| &= \sqrt{(\cos \alpha - 1)^2 + (\sin \alpha - 1)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{4 - 2(\sin \alpha + \cos \alpha)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AQ}| &= \sqrt{(\cos \alpha + 1)^2 + (\sin \alpha + 1)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{4 + 2(\sin \alpha + \cos \alpha)}\end{aligned}$$

である。内積の定義より $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = |\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AQ}| \cdot \cos \theta$ が成り立つから、

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{2}{\sqrt{16 - 4(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{12 - 4 \sin 2\alpha}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3 - \sin 2\alpha}}\end{aligned}$$

である。 $0 \leq \alpha < 2\pi$ より $-1 \leq \sin 2\alpha \leq 1$ であるから、 $\cos \theta$ の値域は

$$\frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

である。したがって、 $0 \leq \theta \leq \pi$ より $\cos \theta$ は $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき最小値 $\frac{1}{2}$ をそれぞれとる。

$$(\text{答}) \quad \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき最大値 } \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき最小値 } \frac{1}{2}$$

(1)

まず, $\overrightarrow{PQ} = (0, \sin x, 0)$, $\overrightarrow{PR} = (0, 0, x + \sin x)$ と求められる。三角形 PQR の面積を $S(x)$ とおく。

$0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ より $\sin x > 0$, $x + \sin x > 0$ であるから, $S(x)$ は,

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 \cdot |\overrightarrow{PR}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\sin^2 x (x + \sin x)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sin x (x + \sin x) \end{aligned}$$

と x の式で表せる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} \sin x (x + \sin x)$$

(2)

V は $S(x)$ を $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で足し合わせたものであるから,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2} \sin^2 x \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{2} x (-\cos x)' + \frac{1}{2} \sin^2 x \right\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} \\ &= \frac{4 + \pi}{8} \end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad \frac{4 + \pi}{8}$$

(1)

サイコロを1回投げてPの座標が偶数になるのは出た目が5以上のときだから、

$$a_1 = \frac{1}{3}$$

である。サイコロを2回投げてPの座標が偶数となる事象は、5以上の目が2回出るとき、4以下の目が2回出るときのいずれかである。よって、

$$a_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

と計算できる。サイコロを3回投げてPの座標が偶数となる事象は、5以上の目が3回出るとき、5以上の目が1回、4以下の目が2回出るときのいずれかである。よって、

$$\begin{aligned} a_3 &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 + {}_3C_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{13}{27} \end{aligned}$$

と計算できる。

(答) $\frac{13}{27}$

(2)

$n+1$ 回目の試行でPの座標が偶数となる事象は、 n 回目の試行で座標が偶数かつ $n+1$ 回目に5以上の目が出るとき、または n 回目の試行で座標が奇数かつ $n+1$ 回目に4以下の目が出るときのいずれかである。よって a_{n+1} は a_n を用いて、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n \cdot \frac{1}{3} + (1 - a_n) \cdot \frac{2}{3} \\ &= -\frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

と表すことができる。

(答) $a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}$

(3)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= -\frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{1}{2} &= -\frac{1}{3}\left(a_n - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

と変形できるから、数列 $\left\{a_n - \frac{1}{2}\right\}$ は初項 $a_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$ 、公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列である。したがって

a_n の一般項は、

$$\begin{aligned} a_n - \frac{1}{2} &= \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{1}{2} \left\{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

と求められる。

(答) $a_n = \frac{1}{2} \left\{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$