

(1)

点 P, Q の座標は $(\cos t, \sin t, 0)$, $(\cos(t+\pi), \sin(t+\pi), 0)$ (t は実数) とおくことができ, このとき

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} \cos t - 1 \\ \sin t - 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} -\cos t - 1 \\ -\sin t - 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

であるから, 内積 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ を計算すると,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} &= (\cos t - 1) \cdot (-\cos t - 1) + (\sin t - 2) \cdot (-\sin t - 2) + (-1) \cdot (-1) \\ &= 1 - \cos^2 t + 4 - \sin^2 t + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

となる。

(答) 5

(2)

(1) と同じように点 P, Q の座標をおくと, 内積の定義より

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}}{|\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AQ}|} \\ &= \frac{5}{\sqrt{(\cos t - 1)^2 + (\sin t - 2)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-\cos t - 1)^2 + (-\sin t - 2)^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{49 - (4 \sin t + 2 \cos t)^2}} \end{aligned}$$

となる。ここで, $f(t) = 4 \sin t + 2 \cos t$ とおくと, 三角関数の合成を行うことによって,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{4^2 + 2^2} \sin(t + \alpha) \\ &= \sqrt{20} \sin(t + \alpha) \end{aligned}$$

と表すことができる。ただし, α は

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{20}} \\ \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{20}} \end{cases}$$

を満たす実数である。 t は実数全体を動くから, $f(t)^2$ の最大値は 20, 最小値は 0 であるため,

$\cos \theta$ の最大値, 最小値は

$$\begin{aligned} \text{最大値: } & \frac{5}{\sqrt{49 - 20}} = \frac{5}{\sqrt{29}} \\ \text{最小値: } & \frac{5}{\sqrt{49 - 0}} = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

となる。

(答) 最大値: $\frac{5}{\sqrt{29}}$, 最小値: $\frac{5}{7}$

(3)

(2) より $\cos \theta = \frac{5}{7}$ のとき, 三角形 PAQ の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2 |\overrightarrow{AQ}|^2 - (\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ})^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{\cos \theta}\right)^2 - 1} |\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} \cdot 5 \\ &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\sqrt{6}$

(1)

条件(a), (b)より, 2 次の正方行列 A に対して

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

であり

$$\begin{aligned} (A-E)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow (A-E) \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

であるから, ①, ②より,

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{3}$$

を満たす。ここで, 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めると,

$$\frac{1}{1 \cdot 3 - 2 \cdot 2} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

となるから, ③より A は

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$$

(2)

まず, 多項式 x^n (n は 1 以上の整数) を $(x-1)^2$ で割ったときの余りを考える。このときの商を

$Q(x)$, 余りを $ax+b$ をおくと,

$$x^n = (x-1)^2 Q(x) + ax + b \quad \dots \textcircled{4}$$

と表せる。④の両辺に $x=1$ を代入すると,

$$\begin{aligned} 1^n &= 0 + a + b \\ \Leftrightarrow a + b &= 1 \quad \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

が得られ, また, ④の両辺を x で微分すると

$$nx^{n-1} = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x) + a$$

となるから, この式に $x=1$ を代入すると,

$$\begin{aligned} n \cdot 1^{n-1} &= 0 + 0 + a \\ \Leftrightarrow a &= n \quad \dots \textcircled{6} \end{aligned}$$

が得られる。⑤, ⑥より, $a=n, b=-n+1$ となることがわかるから, ④は

$$x^n = (x-1)^2 Q(x) + nx + (-n+1)$$

となる。この式より, x を A に置き換えることによって,

$$A^n = (A-E)^2 Q(A) + nA + (-n+1)E$$

が成立することがわかるから, 条件(a)より, n が 1 以上の整数のとき

$$\begin{aligned} A^n &= nA + (-n+1)E \\ &= \begin{pmatrix} -6n+1 & 4n \\ -9n & 6n+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求まる。さらに, 逆行列を計算することによって,

$$\begin{aligned} A^{-n} &= (A^n)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -6n+1 & 4n \\ -9n & 6n+1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{(-6n+1) \cdot (6n+1) - 4n \cdot (-9n)} \begin{pmatrix} 6n+1 & -4n \\ 9n & -6n+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6(-n)+1 & 4(-n) \\ -9(-n) & 6(-n)+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることがわかるから, n が -1 以下の整数であるときも同じように表せることがわかる。

$$(\text{答}) \begin{pmatrix} -6n+1 & 4n \\ -9n & 6n+1 \end{pmatrix}$$

(1)

サイコロを n 回投げたうち、

$$\begin{cases} \text{サイコロの目が1または2の場合が} a \text{ 回} \\ \text{サイコロの目が3または4の場合が} b \text{ 回} \\ \text{サイコロの目が5または6の場合が} c \text{ 回} \end{cases}$$

であるとする。

点 P の座標が 3 となるのは

$$\begin{cases} a+b+c=n \\ b+2c=3 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たすときであるが、 $a, b, c \geq 0$ に注意して①を解くと、 $n \geq 3$ のとき

$$(a, b, c) = (n-3, 3, 0), (n-2, 1, 1)$$

となるから、確率 $q_n(3)$ は

$$\begin{aligned} q_n(3) &= {}_n C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 + {}_n C_2 \cdot {}_2 C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^n + n(n-1) \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{n(n-1)(n+4)}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

となる。また、これは $n=0, 1, 2$ でも成立することがわかるから、0 以上のすべての整数 n について

$$q_n(3) = \frac{n(n-1)(n+4)}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

となることがわかる。

同様にして、点 P の座標が 4 となるのは

$$\begin{cases} a+b+c=n \\ b+2c=4 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たすときであるが、 $a, b, c \geq 0$ に注意して①を解くと、 $n \geq 4$ のとき

$$(a, b, c) = (n-4, 4, 0), (n-3, 2, 1), (n-2, 0, 2)$$

となるから、確率 $q_n(4)$ は

$$\begin{aligned} q_n(4) &= {}_n C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 + {}_n C_3 \cdot {}_3 C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) + {}_n C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{n(n-1)(n^2+7n-6)}{24} \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

となる。また、これは $n=0, 1, 2, 3$ でも成立することがわかるから、0 以上のすべての整数 n について

$$q_n(4) = \frac{n(n-1)(n^2+7n-6)}{24} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

となることがわかる。

$$(\text{答}) \quad q_n(3) = \frac{n(n-1)(n+4)}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$q_n(4) = \frac{n(n-1)(n^2+7n-6)}{24} \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

(2)

サイコロを n 回投げて初めて点 P の座標が 3 以上となるのは、 $n \geq 1$ のとき

$$\begin{cases} \text{「}(n-1)\text{ 回投げたとき点 P の座標が1である かつ } n\text{ 回目のサイコロの目が5ま} \\ \text{たは6である」} & \dots \textcircled{1} \\ \text{または} \\ \text{「}(n-1)\text{ 回投げたとき点 P の座標が2である かつ } n\text{ 回目のサイコロの目が} \\ \text{3, 4, 5, 6 のいずれかである」} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

のいずれかの場合であり、①、②は互いに排反であるから、求める確率 p_n は

$$p_n = q_{n-1}(1) \cdot \frac{1}{3} + q_{n-1}(2) \cdot \frac{2}{3} \quad \dots \textcircled{3}$$

である。

ここで、(1)と同様に考えれば、0 以上のすべての整数 n について

$$\begin{aligned} q_n(1) &= {}_n C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right) \\ &= n \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ q_n(2) &= {}_n C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 + {}_n C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

であることがわかるから、③より、 $n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} p_n &= (n-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3} + \frac{(n-1)n}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{2}{3} \\ &= (n+1)(n-1) \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

となることがわかる。また、 $n=0$ のときは

$$p_0 = 0$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_n = (n+1)(n-1) \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$p_0 = 0$$

(3)

 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^n \frac{P_k}{k-1} \\ &= \sum_{k=2}^n (k+1) \left(\frac{1}{3}\right)^k \end{aligned}$$

である。この和を計算すると、

$$\begin{aligned} S_n &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + (n+1) \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \rightarrow) \quad \frac{1}{3} S_n &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + n \left(\frac{1}{3}\right)^n + (n+1) \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \\ \hline \frac{2}{3} S_n &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n - (n+1) \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} S_n &= \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} - (n+1) \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \\ \Leftrightarrow S_n &= \frac{1}{2} + \frac{9}{4} \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right\} - \frac{3}{2} (n+1) \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \\ \therefore S_n &= \frac{7}{12} - \frac{5}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2} n \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

となるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \left(\because 0 < \frac{1}{3} < 1 \right)$ より、

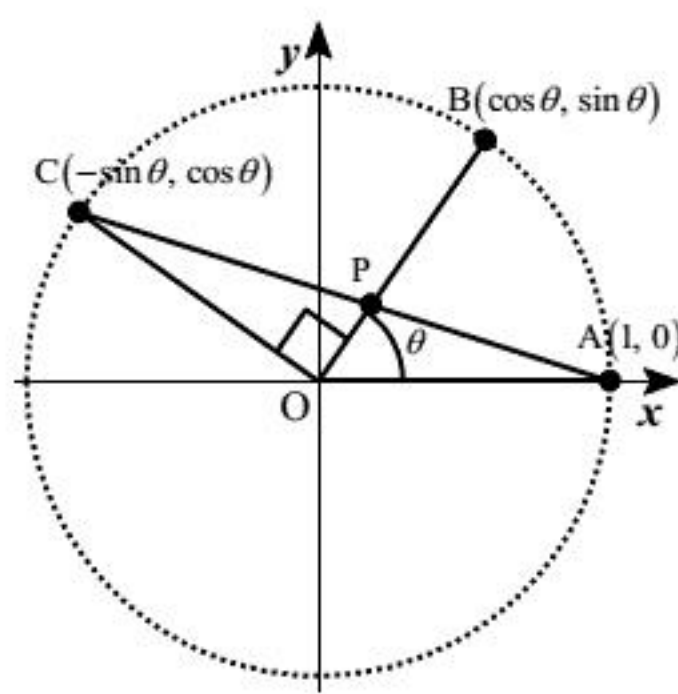
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{7}{12} - 0 - 0 \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{7}{12}$$

(1)

中心が原点 O 、半径が 1 の円と 4 点 A, B, C, P を図示すると、以下の図のようになる。



点 P は直線 OB 上の点であるから、ある実数 k を用いて $P(k \cos \theta, k \sin \theta)$ とおける。また、直線 AC の式は $(\cos \theta)(x-1) + (1+\sin \theta)y = 0$ であり、点 P はこの直線上にあるから、

$$(\cos \theta)(k \cos \theta - 1) + (1 + \sin \theta)k \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow k(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \sin \theta) = \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \quad (\because 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

を満たす。したがって、点 P の座標は

$$\begin{aligned} (x, y) &= \left(\frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta}, \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta} \right) \\ &= \left(1 - \sin \theta, \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta} \right) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad x = 1 - \sin \theta, \quad y = \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta}$$

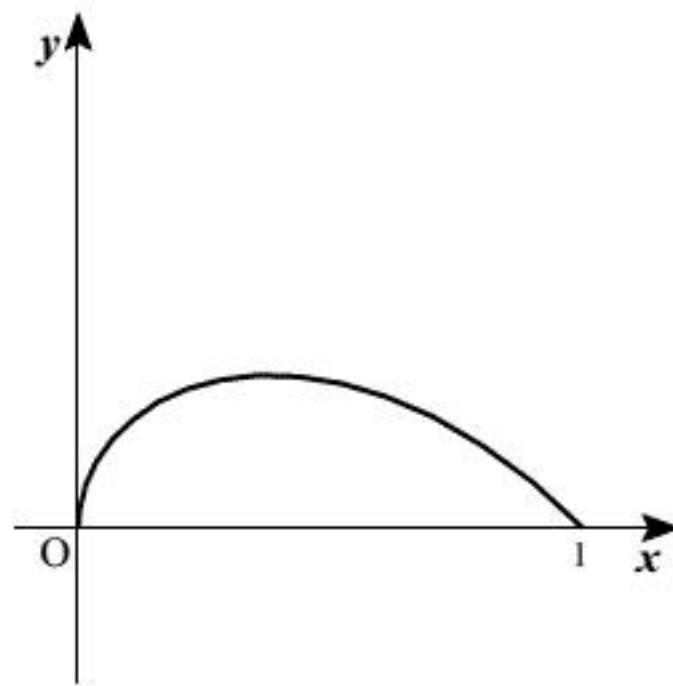
(2)

$$x(\theta) = 1 - \sin \theta, \quad y(\theta) = \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta} \text{ とおく。}$$

このとき、 $x(0) = 1, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ であり、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において $x(\theta)$ は単調減少である。また、

$$y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ であり、} 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ において、} \sin \theta > 0 \text{ かつ } \cos \theta > 0 \text{ より } y(\theta) > 0 \text{ である。}$$

したがって、点 P が描く曲線は以下の図のようになる。



また、 x と θ の対応は以下の表のようになる。

x	0	$\rightarrow$	1
θ	$\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	0

さらに、 $\frac{dx(\theta)}{d\theta} = -\cos \theta$ であるから、求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 y dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta} \cdot \frac{dx(\theta)}{d\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta (1 - \sin^2 \theta)}{1 + \sin \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (1 - \sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin \theta - \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right\} d\theta \\ &= \left[-\cos \theta - \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad 1 - \frac{\pi}{4}$$

(3)

$$y(\theta) = \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta} \text{ を微分すると、}$$

$$\begin{aligned} y'(\theta) &= \frac{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)(1 + \sin \theta) - \sin \theta \cos^2 \theta}{(1 + \sin \theta)^2} \\ &= \frac{(1 - 2\sin^2 \theta)(1 + \sin \theta) - \sin \theta (1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)^2} \\ &= \frac{(1 - 2\sin^2 \theta) - \sin \theta + \sin^2 \theta}{1 + \sin \theta} \\ &= \frac{-\sin^2 \theta - \sin \theta + 1}{1 + \sin \theta} \end{aligned}$$

となる。さらに $y'(\theta)$ を微分すると、

$$\begin{aligned} y''(\theta) &= \frac{(-2\sin \theta \cos \theta - \cos \theta)(1 + \sin \theta) - (-\sin^2 \theta - \sin \theta + 1)\cos \theta}{(1 + \sin \theta)^2} \\ &= \frac{-\cos \theta \{(\sin \theta + 1)^2 + 1\}}{(1 + \sin \theta)^2} \end{aligned}$$

となる。よって、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲では $y''(\theta) \leq 0$ となるから、 $y'(\theta)$ は単調減少関数であり、

端点での値は

$$y'(0) = \frac{-0 - 0 + 1}{(1 + 0)} = 1$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1 - 1 + 1}{(1 + 1)} = -\frac{1}{2}$$

であるから、 $y'(\theta)$ の増減表は以下のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$y''(\theta)$		$-$	
$y'(\theta)$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

上の増減表より、 $y'(\theta) = 0$ となる θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲内に 1 つ存在することがわかるから、

その値を β とすると、 $y(\theta)$ の増減表は以下のようになる。

θ	0	$\cdots$	β	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$y'(\theta)$	1	$+$	0	$-$	$-\frac{1}{2}$
$y(\theta)$	0	$\nearrow$	最大	$\searrow$	0

したがって、 $\alpha = \beta$ であり、このとき α は

$$\begin{aligned} y'(\alpha) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-\sin^2 \alpha - \sin \alpha + 1}{1 + \sin \alpha} &= 0 \\ \Leftrightarrow -\sin^2 \alpha - \sin \alpha + 1 &= 0 & \cdots \textcircled{1} \\ \Leftrightarrow -(1 - \cos^2 \alpha) - \sin \alpha + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \alpha &= (\sin \alpha)^{\frac{1}{2}} \quad (\because \cos \alpha > 0) & \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

を満たすから、 $y(\theta)$ の最大値は、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より、

$$\begin{aligned} y(\alpha) &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha (1 + \sin \alpha)} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha (\sin \alpha)^{\frac{1}{2}}}{1} \\ &= (\sin \alpha)^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

となることがわかる。

(証明終)