

(1)

OB の中点を X とおく. ここで, 点 D, E はそれぞれ $\triangle OAB, \triangle OBC$ の重心であるから, それぞれ線分 AX, CX 上にある. すなわち線分 AE, CD は $\triangle ACX$ を含む平面上にある.

また点 M, N はそれぞれ線分 AE, CD 上にあるので点 A, C, M, N はすべて $\triangle ACX$ を含む平面上にある. 以上により題意が示された.

Q.E.D.

(2)

$\vec{OP} = p\vec{OM}$ ($p \in \mathbb{R}$) とおくと,

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= p\vec{OM} = p\left(\frac{t}{1+t}\vec{OA} + \frac{1}{1+t}\vec{OE}\right) \\ &= p\left(\frac{t}{1+t}\vec{a} + \frac{1}{3(1+t)}\vec{b} + \frac{1}{3(1+t)}\vec{c}\right)\end{aligned}$$

ここで点 P は $\triangle ABC$ 上にあるので

$$\begin{aligned}p\left(\frac{t}{1+t} + \frac{1}{3(1+t)} + \frac{1}{3(1+t)}\right) &= 1 \\ \therefore p &= \frac{3(1+t)}{3t+2}\end{aligned}$$

よって,

$$\vec{OP} = \frac{3t}{3t+2}\vec{a} + \frac{1}{3t+2}\vec{b} + \frac{1}{3t+2}\vec{c}$$

同様に $\vec{OQ} = q\vec{ON}$ ($q \in \mathbb{R}$) とおくと,

$$\begin{aligned}\vec{OQ} &= q\vec{ON} = q\left(\frac{1}{1+t}\vec{OD} + \frac{t}{1+t}\vec{OC}\right) \\ &= q\left(\frac{1}{3(1+t)}\vec{a} + \frac{1}{3(1+t)}\vec{b} + \frac{t}{1+t}\vec{c}\right)\end{aligned}$$

ここで点 Q は $\triangle ABC$ 上にあるので,

$$\begin{aligned}q\left(\frac{1}{3(1+t)} + \frac{1}{3(1+t)} + \frac{t}{1+t}\right) &= 1 \\ \therefore q &= \frac{3(1+t)}{3t+2}\end{aligned}$$

よって,

$$\vec{OQ} = \frac{1}{3t+2}\vec{a} + \frac{1}{3t+2}\vec{b} + \frac{3t}{3t+2}\vec{c}$$

(3)

$\angle POQ = \pi/2$ のとき,

$$\begin{aligned}\vec{OP} \cdot \vec{OQ} &= \frac{3t}{(3t+2)^2}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{(3t+2)^2}|\vec{b}|^2 + \frac{3t}{(3t+2)^2}|\vec{c}|^2 \\ &\quad + \frac{3t+1}{(3t+2)^2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{3t+1}{(3t+2)^2}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{9t^2+1}{(3t+2)^2}\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= -\frac{9(t^2-t)}{2(3t+2)^2} = 0\end{aligned}$$

ここで $t > 0$ より $t = 1$.

$\angle OPQ = \pi/2$ のとき,

$$\vec{PQ} = \frac{1-3t}{3t+2}\vec{a} + \frac{3t-1}{3t+2}\vec{c}$$

なので,

$$\begin{aligned}\vec{OP} \cdot \vec{PQ} &= \frac{-9t^2+3t}{(3t+2)^2}|\vec{a}|^2 + \frac{3t-1}{(3t+2)^2}|\vec{c}|^2 \\ &\quad + \frac{1-3t}{(3t+2)^2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{3t-1}{(3t+2)^2}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{9t^2-6t+1}{(3t+2)^2}\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= -\frac{(3t-1)(27t-14)}{6(3t+2)^2} = 0\end{aligned}$$

よって, $t = \frac{1}{3}, \frac{14}{27}$.

$\angle OQP = \pi/2$ のとき,

$$\begin{aligned}\vec{OQ} \cdot \vec{PQ} &= \frac{1-3t}{(3t+2)^2}|\vec{a}|^2 + \frac{9t^2-3t}{(3t+2)^2}|\vec{c}|^2 \\ &\quad + \frac{1-3t}{(3t+2)^2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{3t-1}{(3t+2)^2}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{-9t^2+6t-1}{(3t+2)^2}\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= \frac{(3t-1)(27t-4)}{6(3t+2)^2} = 0\end{aligned}$$

よって, $t = \frac{1}{3}, \frac{4}{27}$.

以上より, 求める t の値は

$$t = \frac{4}{27}, \frac{14}{27}, \frac{1}{3}, 1$$

(1)

 l の方程式は

$$(\cos \theta)x + (\sin \theta)y = 1$$

このとき Q の座標は $\left(2, \frac{1-2\cos \theta}{\sin \theta}\right)$.

ここで R の x 座標を t とおくと、座標は $\left(t, \frac{1-t\cos \theta}{\sin \theta}\right)$.

よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OR} &= \frac{2t+1-(t+2)\cos \theta}{\sin^2 \theta} = 0 \\ \therefore t &= \frac{2\cos \theta - 1}{2 - \cos \theta}\end{aligned}$$

このとき R の座標は $\left(\frac{2\cos \theta - 1}{2 - \cos \theta}, \frac{2\sin \theta}{2 - \cos \theta}\right)$.

(2)

$$\begin{aligned}PR &= \sqrt{\left(\frac{2\cos \theta - 1}{2 - \cos \theta} - \cos \theta\right)^2 + \left(\frac{2\sin \theta}{2 - \cos \theta} - \sin \theta\right)^2} \\ &= \frac{\sin \theta}{2 - \cos \theta} = f(\theta)\end{aligned}$$

このとき、

$$f'(\theta) = \frac{2\cos \theta - 1}{(2 - \cos \theta)^2}$$

よって、 $f(\theta)$ の増減は下のとおり.

θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	π
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$		↗	極大	↘	

したがって $f(\theta)$ は $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ をとる.

(3)

$$x = \frac{2\cos \theta - 1}{2 - \cos \theta}, y = \frac{2\sin \theta}{2 - \cos \theta}$$

これらを $\sin \theta, \cos \theta$ について解くと、

$$\cos \theta = \frac{2x+1}{x+2}, \sin \theta = \frac{3y}{2(x+2)}$$

このとき、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より、

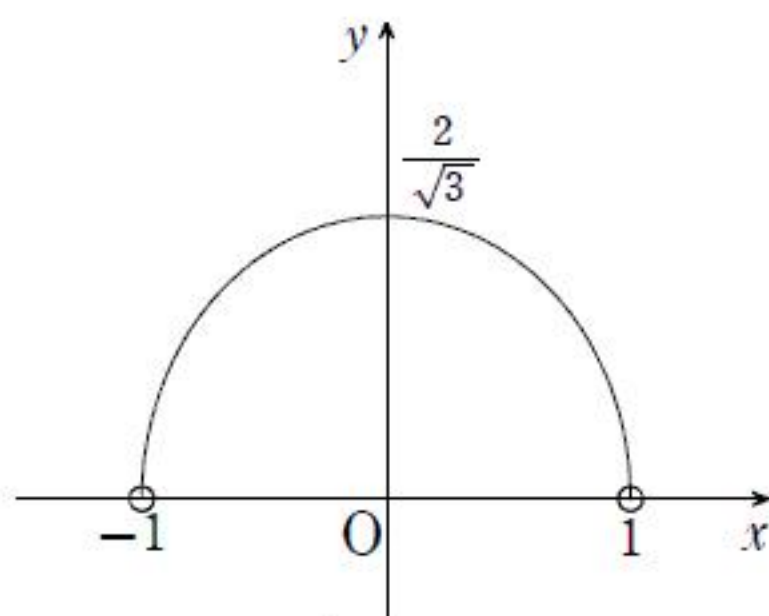
$$\begin{aligned}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 + \left\{\frac{3y}{2(x+2)}\right\}^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{4}y^2 &= 1\end{aligned}$$

また、

$$x = -2 + \frac{3}{2 - \cos \theta}, y = \frac{2\sin \theta}{2 - \cos \theta}$$

であるから、 $0 < \theta < \pi$ のとき

$-1 < x < 1, y > 0$. よって、 R の軌跡の概形は次のとおり.



(1)

 $g(x) = 0$ の解を α とおくと,

$$\alpha^3 = -\alpha^2 - \alpha = \alpha + 1 = 1$$

ここで, $f(x^k)$ を $g(x)$ で割った商を $h_k(x)$, 余りを $p_kx + q_k$ ($p_k, q_k \in \mathbb{R}$) とおくと,

$$\begin{aligned}\alpha^4 + a\alpha^2 + b &= p_2\alpha + q_2 \Leftrightarrow \alpha - (\alpha + 1)a + b = p_2\alpha + q_2 \\ \alpha^8 + a\alpha^4 + b &= p_4\alpha + q_4 \Leftrightarrow -(\alpha + 1) + a\alpha + b = p_4\alpha + q_4\end{aligned}$$

ここで, $p_2 = p_4, q_2 = q_4$ より,

$$1 - a = -1 + a \quad \therefore a = 1$$

また,

$$\alpha^6 + \alpha^3 + b = 2 + b = 0 \quad \therefore b = -2$$

(2)

$$x^{2k} + x^k - 2 = (x^2 + x + 1)h_k(x) + p_kx + q_k$$

i) $k \equiv 0 \pmod{3}$ のとき $x = \alpha$ を代入して $p_k\alpha + q_k = 0$.ここで, $g(x) = 0$ の解は $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. $p_k, q_k \in \mathbb{R}$ より $p_k = 0, q_k = 0$.ii) $k \equiv 1 \pmod{3}$ のとき

$$-(\alpha + 1) + \alpha - 2 = p_k\alpha + q_k \Leftrightarrow p_k\alpha + q_k = -3$$

よって, $p_k = 0, q_k = -3$.iii) $k \equiv 2 \pmod{3}$ のとき

$$\alpha - (\alpha + 1) - 2 = p_k\alpha + q_k \Leftrightarrow p_k\alpha + q_k = -3$$

よって, $p_k = 0, q_k = -3$.

以上より,

$$\begin{cases} k \equiv 0 \pmod{3} \text{ のとき} & 0 \\ k \equiv 1, 2 \pmod{3} \text{ のとき} & -3 \end{cases}$$

(3)

$$x^{2k} + x^k + 1 = (x^2 + x - 2)h_k(x) + c_kx + d_k$$

とおく. ここで $x = 1$ を代入すると

$$c_k + d_k = 3$$

また $x = -2$ を代入すると

$$-2c_k + d_k = 4^k + (-2)^k + 1$$

これらを解いて

$$d_k = \frac{4^k + (-2)^k + 7}{3}$$

よって,

$$\sum_{k=1}^n d_k = \frac{4^{n+1}}{9} - \frac{(-2)^{n+1}}{9} + \frac{7n-2}{3}$$

(1)

$$\begin{aligned}
V(\alpha) &= \pi \int_0^{\sin \alpha - \frac{1}{3} \sin^3 \alpha} x^2 dy \\
&= \pi \int_0^\alpha (x(t))^2 \frac{dy}{dt} dt \\
&= \pi \int_0^\alpha \cos^2 t (\cos t - \sin^2 t \cos t) dt \\
&= \pi \int_0^\alpha \cos^5 t dt \\
&= \pi \int_0^\alpha \frac{1}{4} (\cos 3t + 3 \cos t) \cdot \frac{1}{2} (\cos 2t + 1) dt \\
&= \frac{\pi}{8} \int_0^\alpha (\cos 3t \cos 2t + 3 \cos t \cos 2t + \cos 3t + 3 \cos t) dt \\
&= \frac{\pi}{8} \int_0^\alpha \left(\frac{1}{2} \cos 5t + \frac{5}{2} \cos 3t + 5 \cos t \right) dt \\
&= \frac{\pi}{8} \left(\frac{1}{10} \sin 5\alpha + \frac{5}{6} \sin 3\alpha + 5 \sin \alpha \right)
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
S(\alpha) &= \int_0^{\sin \alpha - \frac{1}{3} \sin^3 \alpha} x dy \\
&= \int_0^\alpha x(t) \cdot \frac{dy}{dt} dt \\
&= \int_0^\alpha \cos t (\cos t - \sin^2 t \cos t) dt \\
&= \int_0^\alpha \cos^4 t dt \\
&= \int_0^\alpha \left\{ \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) \right\}^2 dt \\
&= \frac{1}{8} \int_0^\alpha (3 + 4 \cos 2t + \cos 4t) dt \\
&= \frac{1}{8} (3\alpha + 2 \sin 2\alpha + \frac{1}{4} \sin 4\alpha)
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{V(\alpha)}{S(\alpha)} &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \pi \frac{\frac{1}{10} \sin 5\alpha + \frac{5}{6} \sin 3\alpha + 5 \sin \alpha}{\frac{1}{4} \sin 4\alpha + 2 \sin 2\alpha + 3\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \pi \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 5\alpha}{5\alpha} + \frac{5}{2} \cdot \frac{\sin 3\alpha}{3\alpha} + 5 \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}}{\frac{\sin 4\alpha}{4\alpha} + 4 \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} + 3} \\
&= \pi \frac{\frac{1}{2} + \frac{5}{2} + 5}{1 + 4 + 3} = \pi
\end{aligned}$$