1

(1)

$$S_1=a_1$$

であるから

$$a_1=2a_1-1\cdot 2^{1+1}$$

$$\therefore\ a_1=4$$

また

$$S_2=a_1+a_2$$

であるから

$$a_1+a_2=2a_2-2\cdot 2^{2+1}$$

$$\therefore\ a_2=20$$

（答）　$a_1=4$，$a_2=20$

(2)

$$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$$

であるから

$$a_{n+1}=2a_{n+1}-(n+1)\cdot 2^{n+2}-\left(2a_n-n\cdot 2^{n+1}\right)$$

よって

$$a_{n+1}=2a_n+(n+2)\cdot 2^{n+1}$$

（答）　$a_{n+1}=2a_n+(n+2)\cdot 2^{n+1}$

(3)

$$a_{n+1}=2a_n+(n+2)\cdot 2^{n+1}$$

の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+n+2$$

となるので

$$b_{n+1}-b_n=n+2$$

をえる。これより数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすると

$$c_n=n+2$$

よって $n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k$$

$$=\frac{a_1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)$$

$$=2+\frac{1}{2}n(n-1)+2(n-1)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+3)$$

これに $n=1$ を代入すると

$$b_1=2$$

となり，この一般式は $n\geqq 1$ で成立することが示される。以上より

$$b_n=\frac{1}{2}n(n+3)\qquad(n\geqq 1)$$

となり

$$a_n=2^n\cdot b_n=2^{n-1}\cdot n(n+3)\qquad(n\geqq 1)$$

となる。

（答）　$b_n=\frac{1}{2}n(n+3)$，$a_n=2^{n-1}\cdot n(n+3)$　(ともに $n\geqq 1$ で成立)

2

(1)

$$\overrightarrow{OH}\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=\left\{t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}\right\}\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)$$
$$=(2t-1)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-t\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+(1-t)\left|\overrightarrow{OB}\right|^2$$
$$=2(2t-1)\cos\theta-5t+1$$

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ であるから

$$2(2t-1)\cos\theta-5t+1=0$$

よって

$$t=\frac{2\cos\theta-1}{4\cos\theta-5}$$

（答）　$t=\dfrac{2\cos\theta-1}{4\cos\theta-5}$

(2)

$$\frac{1}{4}=\frac{2\cos\theta-1}{4\cos\theta-5}$$

より

$$\cos\theta=-\frac{1}{4}$$

であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

したがって面積は

$$\frac{1}{2}\cdot2\cdot1\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

（答）　$\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

(3)

点Aから辺OBに下ろした垂線の足をDとおくと，△OABは二等辺三角形であるから

$$OD=BD=\frac{1}{2}$$

よって

$$\cos\theta=\frac{OD}{AO}=\frac{1}{4}$$

であるから

$$t=\frac{2\cos\theta-1}{4\cos\theta-5}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}-1}{1-5}$$
$$=\frac{1}{8}$$

（答）　$\dfrac{1}{8}$

3

(1)

(A が出した目, B が出した目)

と表すことにすると，目の和が 3 となるような目の出方は

$(1,2),(2,1)$

目の和が 6 となるような目の出方は

$(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$

目の和が 9 となるような目の出方は

$(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)$

目の和が 12 となるような目の出方は

$(6,6)$

以上より求める確率は

$$\frac{12}{6\times 6}=\frac{1}{3}$$

(答) $\frac{1}{3}$

(2)

A が 1 回点をもらい, B が 2 回点をもらう確率である。1 回のゲームで A, B が点をもらう確率はそれぞれ $\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ なので

$${}_3C_1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$$

(答) $\frac{4}{9}$

(3)

A の持っている点が B よりも多いのは，A が 2 回以上点をもらうときである。これの余事象を考えると，それは A が点をもらう回数が 1 回以下ということである。その確率は

$$\frac{4}{9}+\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27}$$

より，求める確率は

$$1-\frac{20}{27}=\frac{7}{27}$$

(答) $\frac{7}{27}$

4

(A)

(1)

$$f'(x)=\frac{2\cos x(\cos x+2)+2\sin^2 x}{(\cos x+2)^2}$$

$$=\frac{4\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)}{(\cos x+2)^2}$$

より，次の増減表をえる。

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	↘	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	↗	0

よって極大値 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ $\left(x=\frac{2}{3}\pi\right)$，極小値 $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ $\left(x=\frac{4}{3}\pi\right)$

（答） 極大値 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ $\left(x=\frac{2}{3}\pi\right)$，極小値 $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ $\left(x=\frac{4}{3}\pi\right)$

(2)

$$\frac{2\sin x}{\cos x+2}=1$$

より

$$2(\sin x-1)=\cos x \quad \cdots ①$$

これの両辺を 2 乗して整理すると

$$(5\sin x-3)(\sin x-1)=0$$

よって

$$\sin x=1,\frac{3}{5}$$

$-1\leqq\sin x\leqq 1$ であるから，① より

$$\cos x\leqq 0$$

なので

$$\cos x=0,-\frac{4}{5}$$

である。 $\sin x$ の値から

$$0\leqq\alpha,\beta\leqq\pi$$

であることが分かるので

$$\begin{cases}\cos\alpha=0\\ \cos\beta=-\frac{4}{5}\end{cases}$$

（答） $\begin{cases}\cos\alpha=0\\ \cos\beta=-\frac{4}{5}\end{cases}$

(3)

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta\frac{2\sin x}{\cos x+2}dx$$

$$=-2\int_\alpha^\beta\frac{(\cos x+2)'}{\cos x+2}dx$$

$$=-2\left[\log(\cos x+2)\right]_\alpha^\beta$$

$$=2\log\frac{\cos\alpha+2}{\cos\beta+2}$$

$$=2\log\frac{5}{3}$$

（答） $2\log\frac{5}{3}$

(B)

(1)

$$(x+3)f(x)=(x+3)(x^3+ax^2+bx+c)$$

$$=x^4+(a+3)x^3+(3a+b)x^2+(3b+c)x+3c$$

また

$$xf(x+1)=x\left\{(x+1)^3+a(x+1)^2+b(x+1)+c\right\}$$

$$=x^4+(a+3)x^3+(2a+b+3)x^2+(a+b+c+1)x$$

であるから，両者の係数を比較して，

$$\begin{cases}3a+b=2a+b+3\\ 3b+c=a+b+c+1\\ 3c=0\end{cases}$$

よって

$$\begin{cases}a=3\\ b=2\\ c=0\end{cases}$$

（答） $\begin{cases}a=3\\ b=2\\ c=0\end{cases}$

(2)

$$f(x)=x^3+3x^2+2x$$

であるから

$$f'(x)+x=3x^2+7x+2$$

$$=(3x+1)(x+2)$$

となるので

$$|f'(x)+x|=\begin{cases}-(3x^2+7x+2) & \left(-2\leqq x\leqq-\frac{1}{3}\right)\\ 3x^2+7x+2 & \left(x\leqq-2,-\frac{1}{3}\leqq x\right)\end{cases}$$

よって

$$\int_{-1}^{1}|f'(x)+x|dx=-\int_{-1}^{-\frac{1}{3}}(3x^2+7x+2)dx+\int_{-\frac{1}{3}}^{1}(3x^2+7x+2)dx$$

$$=-\left[x^3+\frac{7}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{-\frac{1}{3}}+\left[x^3+\frac{7}{2}x^2+2x\right]_{-\frac{1}{3}}^{1}$$

$$=\frac{206}{27}$$

（答） $\frac{206}{27}$