

1

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP_1} &= \vec{a} + t\vec{b}, \quad \overrightarrow{AP_2} = (1-t)\vec{a} + \vec{b}, \\ \overrightarrow{AP_3} &= \vec{b} + t\vec{c}, \quad \overrightarrow{AP_4} = (1-t)\vec{b} + \vec{c}, \\ \overrightarrow{AP_5} &= t\vec{a} + \vec{c}, \quad \overrightarrow{AP_6} = \vec{a} + (1-t)\vec{c}\end{aligned}$$

であるから、線分 P_1P_4 , P_2P_5 , P_3P_6 の中点をそれぞれ M_1 , M_2 , M_3 とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM_1} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_4}) = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2} \\ \overrightarrow{AM_2} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP_2} + \overrightarrow{AP_5}) = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2} \\ \overrightarrow{AM_3} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP_3} + \overrightarrow{AP_6}) = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2}\end{aligned}$$

となり、それぞれの線分の中点が一致することが示された。

(証明終)

また

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2}$$

(答) $\overrightarrow{AM} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2}$

(2)

3 点 P_1 , P_2 , P_3 によって作られる平面上の点を I とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \alpha\overrightarrow{AP_1} + \beta\overrightarrow{AP_2} + (1-\alpha-\beta)\overrightarrow{AP_3} \\ &= \{\alpha + \beta(1-t)\}\vec{a} + (\alpha t + 1 - \alpha)\vec{b} + (1 - \alpha - \beta)t\vec{c}\end{aligned}$$

と表すことができる。 $\overrightarrow{AP_3} = t\vec{a} + \vec{c}$ なので

$$\begin{cases} \alpha + \beta(1-t) = t & \cdots \text{①} \\ \alpha(t-1) + 1 = 0 & \cdots \text{②} \\ (1-\alpha-\beta)t = 1 & \cdots \text{③} \end{cases}$$

を満たす t を求めればよい。①, ②より

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{1-t} \\ \beta = \frac{-t^2 + t - 1}{(1-t)^2} \end{cases}$$

これを③に代入して

$$\begin{aligned}2t^3 - 3t^2 + 3t - 1 &= 0 \\ (2t-1)(t^2 - t + 1) &= 0\end{aligned}$$

となる。

$$t^2 - t + 1 = 0$$

の判別式を D とおくと

$$D = 1 - 4 = -3 < 0$$

より、実数解をもたない。以上から

$$t = \frac{1}{2}$$

となる。

(答) $t = \frac{1}{2}$

このとき

$$\overrightarrow{AI} = \left(\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)\vec{a} + \left(1 - \frac{1}{2}\alpha\right)\vec{b} + \frac{1-\alpha-\beta}{2}\vec{c}$$

となり

$$\alpha = 1, \beta = -2$$

のとき $\overrightarrow{AP_4}$ に一致する。また

$$\alpha = 2, \beta = -2$$

のとき $\overrightarrow{AP_6}$ に一致する。よってこのとき 6 点は同一平面上にある。

(証明終)

(3)

条件より

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a}$$

である。

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{AP_2} - \overrightarrow{AP_1} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{P_1P_2}|^2 &= \left| -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{1}{2}(1 - \vec{a} \cdot \vec{b})\end{aligned}$$

また、同様に考えて

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{AP_3} - \overrightarrow{AP_1} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{P_1P_3}|^2 &= \left| -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \right|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{c}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= \frac{3}{2}(1 - \vec{a} \cdot \vec{b})\end{aligned}$$

以上から

$$P_1P_2 : P_1P_3 = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \vec{a} \cdot \vec{b})} : \sqrt{\frac{3}{2}(1 - \vec{a} \cdot \vec{b})} = 1 : \sqrt{3}$$

また

$$|\overrightarrow{P_2P_3}|^2 = \left| -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} \right|^2 = \frac{1}{2}(1 - \vec{a} \cdot \vec{c})$$

であるから

$$P_1P_2 : P_2P_3 : P_1P_3 = 1 : 1 : \sqrt{3}$$

となるので

$$P_1P_2 = a, P_2P_3 = a, P_1P_3 = \sqrt{3}a$$

とおくと、余弦定理より

$$\begin{aligned}3a^2 &= a^2 + a^2 - 2a^2 \cos \angle P_1P_2P_3 \\ \cos \angle P_1P_2P_3 &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって

$$\angle P_1P_2P_3 = 120^\circ$$

(答) $P_1P_2 : P_1P_3 = 1 : \sqrt{3}$, $\angle P_1P_2P_3 = 120^\circ$

(1)

$$a_2 = a_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = a_2 - \frac{2}{3!} = \frac{1}{6}, \quad a_4 = a_3 - \frac{3}{4!} = \frac{1}{24}$$

より, $a_n = \frac{1}{n!}$ と推定し, これを数学的帰納法にて示す。

(i) $n=1$ のとき

$$a_1 = 1$$

となり, 問題文に与えられた条件と一致する。

(ii) $n=k$ ($k \geq 1$) で $a_n = \frac{1}{n!}$ を仮定する。

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k - \frac{k}{(k+1)!} \\ &= \frac{1}{k!} - \frac{k}{(k+1)!} \\ &= \frac{k+1-k}{(k+1)!} \\ &= \frac{1}{(k+1)!} \end{aligned}$$

となり, $n=k+1$ でも成立する。

以上 (i), (ii) から, 数学的帰納法より $a_n = \frac{1}{n!}$ である。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{1}{n!}$$

(2)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m-1} a_k a_{m-k} &= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{(m-k)!} \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{k=1}^{m-1} {}^m C_k \end{aligned}$$

ここで二項定理より

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^m {}^m C_k x^k$$

であることを利用し, $x=1$ を代入して

$$2^m = \sum_{k=0}^m {}^m C_k$$

となる。

$$\sum_{k=1}^{m-1} {}^m C_k = \sum_{k=0}^m {}^m C_k - 2 = 2^m - 2$$

より

$$\sum_{k=1}^{m-1} a_k a_{m-k} = \frac{2^m - 2}{m!}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{2^m - 2}{m!}$$

(3)

数学的帰納法を用いて証明する。

$$\frac{(a_n)^2}{a_{2n}} = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

であることに注意して

(i) $n=1$ のとき

$$\text{左辺} = {}_2 C_1 = 2$$

$$\text{右辺} = \frac{4}{\sqrt{3}} > \frac{4}{2} = 2$$

より, 左辺 < 右辺

(ii) $n=k$ ($k \geq 1$) で不等式の成立を仮定すると, $n=k+1$ のとき左辺は

$$\frac{(2k+2)!}{(k+1)!(k+1)!} = \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2} \cdot \frac{(2k)!}{k!k!}$$

であるから

$$\frac{(2k+2)!}{(k+1)!(k+1)!} < \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2} \cdot \frac{4^k}{\sqrt{2k+1}} = \frac{2 \cdot 4^k \sqrt{2k+1}}{k+1}$$

が成立する。

$$\begin{aligned} & \frac{4^{k+1}}{\sqrt{2k+3}} - \frac{2 \cdot 4^k \cdot \sqrt{2k+1}}{k+1} \\ &= \frac{(k+1) \cdot 4^{k+1} - 2 \cdot 4^k \cdot \sqrt{2k+3} \cdot \sqrt{2k+1}}{(k+1) \cdot \sqrt{2k+3}} \\ &= 2 \cdot 4^k \cdot \frac{(2k+2) - \sqrt{2k+3} \cdot \sqrt{2k+1}}{(k+1) \cdot \sqrt{2k+3}} \\ &= 2 \cdot 4^k \cdot \frac{\{(2k+2) - \sqrt{2k+3} \cdot \sqrt{2k+1}\} \{(2k+2) + \sqrt{2k+3} \cdot \sqrt{2k+1}\}}{(k+1) \cdot \sqrt{2k+3} \cdot \{(2k+2) + \sqrt{2k+3} \cdot \sqrt{2k+1}\}} \\ &= \frac{2 \cdot 4^k}{(k+1) \cdot \sqrt{2k+3} \cdot \{(2k+2) + \sqrt{2k+3} \cdot \sqrt{2k+1}\}} > 0 \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{(2k+2)!}{(k+1)!(k+1)!} < \frac{4^{k+1}}{\sqrt{2(k+1)+1}}$$

となり, $n=k+1$ でも不等式は成立する。

以上 (i), (ii) から, 数学的帰納法より $\frac{(a_n)^2}{a_{2n}} < \frac{4^n}{\sqrt{2n+1}}$ であることが示された。

(証明終)

3

(1)

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

より、点 F の座標は $(\sqrt{3}, 0)$ である。点 P における接線の方程式は

$$ax + 4by = 4$$

であるから、傾きは $-\frac{a}{4b}$ である。よって法線の傾きを m とすると

$$-\frac{a}{4b} \cdot m = -1$$

$$\therefore m = \frac{4b}{a}$$

となるので、法線の方程式は

$$y = \frac{4b}{a}(x - a) + b = \frac{4b}{a}x - 3b$$

と表される。よって点 Q の座標は $\left(\frac{3}{4}a, 0\right)$ であるから

$$PF^2 = (a - \sqrt{3})^2 + b^2$$

また $b^2 = 1 - \frac{1}{4}a^2$ であるから

$$PF^2 = \frac{3}{4}a^2 - 2\sqrt{3}a + 4$$

となる。同様に考え

$$QF^2 = \left(\frac{3}{4}a - \sqrt{3}\right)^2 = \frac{9}{16}a^2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}a + 3$$

であるから

$$\frac{QF}{PF} = \sqrt{\frac{\frac{9}{16}a^2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}a + 3}{\frac{3}{4}a^2 - 2\sqrt{3}a + 4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

これより一定であることが示された。

(証明終)

(2)

$a = 2\cos\theta$ を $\frac{a^2}{4} + b^2 = 1$ に代入して

$$b = \sin\theta$$

と表されるので

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\cos\theta} \left\{ \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \left(\frac{4b}{a}x - 3b \right) \right\} dx \\ &= \int_0^{2\cos\theta} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx - \left[\frac{2b}{a}x^2 - 3bx \right]_0^{2\cos\theta} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\int_0^{2\cos\theta} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx$$

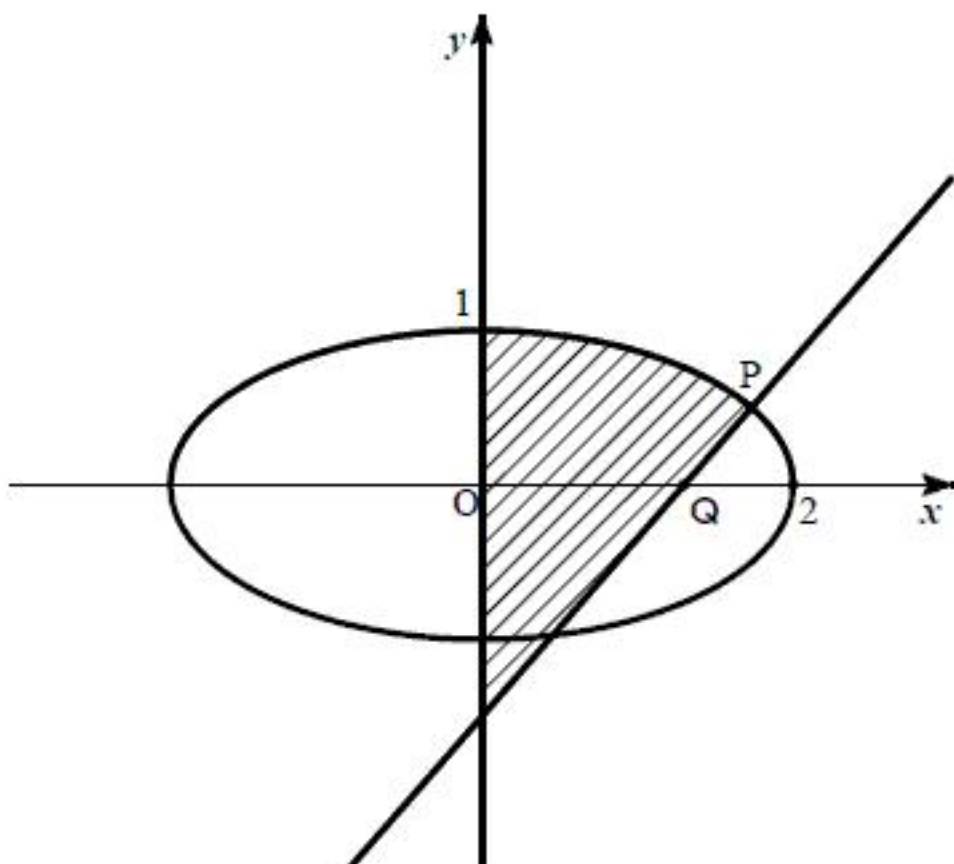
において $x = 2\cos\phi$ $\left(0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと、 $dx = -2\sin\phi d\phi$ であり、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\cos\theta} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx &= -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \sin^2\phi d\phi \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} (-1 + \cos 2\phi) d\phi \\ &= \left[-\phi + \frac{1}{2}\sin 2\phi \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \\ &= \frac{\pi}{2} - \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{2} - \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta - \left(\frac{2b}{a} \cdot 4\cos^2\theta - 6b\cos\theta \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \theta + \frac{3}{2}\sin 2\theta \end{aligned}$$

(答) $\frac{\pi}{2} - \theta + \frac{3}{2}\sin 2\theta$



(3)

$$\frac{dS}{d\theta} = -1 + 3\cos 2\theta$$

より、増減表は

θ	0	...	α	...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dS}{d\theta}$		+	0	-	
S		↗		↘	

となる。ただし、 $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$ とした。よって $\theta = \alpha$ のとき S は最大値をとる。

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1}{3}$$

より

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

よって

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

であるから、点 P の座標は $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

(答) $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

(1)

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり、これらをまとめると

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

両辺の右から $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ をかけると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2 - (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

以上から

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\text{答}) \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)

 $P(x, y), Q(X, Y)$ とおく。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ x \end{pmatrix}$$

であるから

$$\left(\frac{OQ}{OP} \right)^2 = \frac{(x+2y)^2 + x^2}{x^2 + y^2}$$

ここで $x \neq 0$ の下、 $\frac{y}{x} = t$ とおくと、 P は原点ではないことから t は任意の実数を表すことができる。

$$\left(\frac{OQ}{OP} \right)^2 = \frac{4t^2 + 4t + 2}{t^2 + 1} = f(t)$$

とおくと

$$f'(t) = \frac{(8t+4)(1+t^2) - 2t(4t^2+4t+2)}{(t^2+1)^2} = -4 \cdot \frac{t^2 - t - 1}{(t^2+1)^2}$$

ここで

$$t^2 - t - 1 = \left(t - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left(t - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$$

であるから

$$f'(t) = -4 \cdot \frac{t^2 - t - 1}{(t^2+1)^2} = -4 \cdot \frac{\left(t - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left(t - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)}{(t^2+1)^2}$$

これより増減表は以下のようになる。

t	...	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	...	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	...
$f'(t)$	-	0	+	0	-
$f(t)$	$\searrow$	$3-\sqrt{5}$	$\nearrow$	$3+\sqrt{5}$	$\searrow$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{4 + \frac{4}{t} + \frac{2}{t^2}}{1 + \frac{1}{t^2}} = 4$$

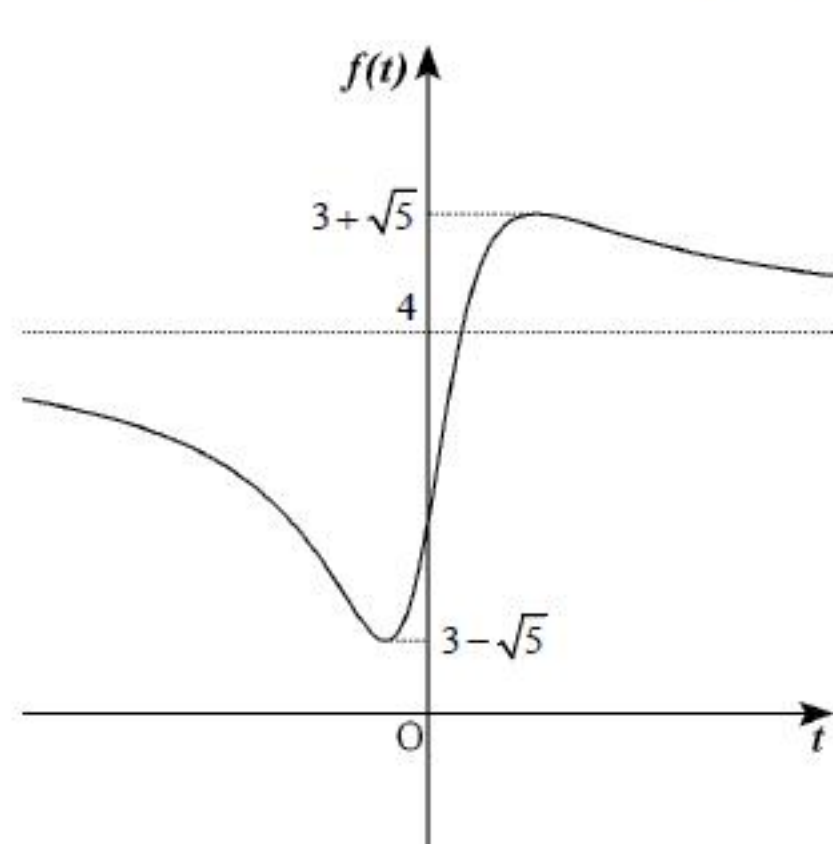
であり、また $x=0$ では

$$\left(\frac{OQ}{OP} \right)^2 = 4$$

となるので、以上から

$$3-\sqrt{5} \leq \left(\frac{OQ}{OP} \right)^2 \leq 3+\sqrt{5}$$

$$(\text{答}) \quad 3-\sqrt{5} \leq \left(\frac{OQ}{OP} \right)^2 \leq 3+\sqrt{5}$$



(3)

 $A_{i+1} = MA_i$ を用いると

$$A_n = M^n A_0$$

であるから

$$M^n = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & c_{n+1} \\ b_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + c_n & 2a_n \\ b_n + d_n & 2b_n \end{pmatrix}$$

また

$$M^n A_0 = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

であることを考え、 c_n, d_n のみを考えると

$$\begin{cases} c_{n+2} = 2a_{n+1} = 2(a_n + c_n) = c_{n+1} + 2c_n \\ d_{n+2} = 2b_{n+1} = 2(b_n + d_n) = d_{n+1} + 2d_n \end{cases}$$

特性方程式 $x^2 = x + 2$ より

$$x = 2, -1$$

であるから

$$\begin{cases} c_{n+2} + c_{n+1} = 2(c_{n+1} + c_n) \\ c_{n+2} - 2c_{n+1} = -(c_{n+1} - 2c_n) \end{cases}$$

よって $n \geq 1$ のとき

$$\begin{cases} c_{n+1} + c_n = 2^{n-1}(c_2 + c_1) \\ c_{n+1} - 2c_n = (-1)^{n-1}(c_2 - 2c_1) \end{cases}$$

ここで

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

であるから、 $c_1 = 2, c_2 = 2$ より

$$\begin{cases} c_{n+1} + c_n = 2^{n+1} \\ c_{n+1} - 2c_n = 2 \cdot (-1)^n \end{cases}$$

よって

$$c_n = \frac{2^{n+1} - 2 \cdot (-1)^n}{3}$$

同様に考えて、 $d_1 = 0, d_2 = 2$ より

$$d_n = \frac{2^n + 2 \cdot (-1)^n}{3}$$

となる。よって

$$A_n = M^n A_0 = \begin{pmatrix} \frac{2^{n+1} - 2 \cdot (-1)^n}{3} \\ \frac{2^n + 2 \cdot (-1)^n}{3} \end{pmatrix}$$

であり、

$$A_{2n-1} = \begin{pmatrix} \frac{2^{2n} - 2 \cdot (-1)^{2n-1}}{3} \\ \frac{2^{2n-1} + 2 \cdot (-1)^{2n-1}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2^{2n} + 2}{3} \\ \frac{2^{2n-1} - 2}{3} \end{pmatrix}$$

となる。よって自然数 k に対して

$$\overrightarrow{A_1 A_{2k+1}} = \left(\frac{2^{2k+2} + 2}{3}, \frac{2^{2k+1} - 2}{3} \right) - (2, 0) = \frac{2^{2k+1} - 2}{3} (2, 1)$$

であるから、すべての自然数 k に対して方向ベクトル $(2, 1)$ にあり、 A_{2k+1} は k の値によらず同一直線上にあることが示された。

(証明終)