

(1) 漸化式に $n=1$ を代入して,

$$S_1 = 2a_1 - 2^2$$

$$S_1 = a_1 \text{ より, } a_1 = 4$$

漸化式に $n=2$ を代入して,

$$S_2 = 2a_2 - 2 \cdot 2^3$$

$$S_2 = a_1 + a_2 \text{ より, } a_2 = a_1 + 2^4 = 20$$

$$(\text{答}) \ a_1 = 4, a_2 = 20$$

(2) $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ より,

$$\{2a_{n+1} - (n+1) \cdot 2^{n+2}\} - \{2a_n - n \cdot 2^{n+1}\} = a_{n+1}$$

これを整理して, $a_{n+1} = 2a_n + (n+2) \cdot 2^{n+1}$

$$(\text{答}) \ a_{n+1} = 2a_n + (n+2) \cdot 2^{n+1}$$

(3) $a_{n+1} = 2a_n + (n+2) \cdot 2^{n+1}$ の両辺を 2^{n+1} で割ると,

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + (n+2)$$

$$b_n = \frac{a_n}{2^n} \text{ とおくと,}$$

$$b_{n+1} = b_n + n + 2 \Leftrightarrow b_{n+1} - b_n = n + 2$$

だから, $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+2) \\ &= \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2} n(n-1) + 2(n-1) \\ &= \frac{1}{2} n(n+3) \end{aligned}$$

(これは $n=1$ の時も成り立つ)

よって, $a_n = b_n \cdot 2^n = n(n+3) \cdot 2^{n-1}$

$$(\text{答}) \ b_n = \frac{1}{2} n(n+3), \ a_n = n(n+3) \cdot 2^{n-1}$$

2

(1) R の座標を求める。

Q を通り l に垂直な直線の方程式は、

$$y = x - 2s$$

なので、 $x = t$ との交点は

$$R(t, t - 2s)$$

となる。よって、

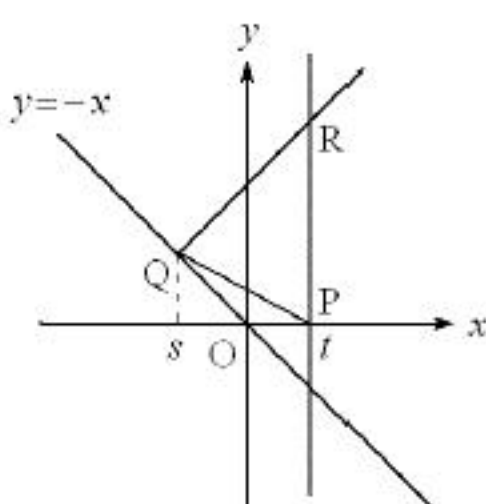
$$\begin{aligned} OR &= \sqrt{t^2 + (t - 2s)^2} \\ &= \sqrt{2(2s^2 - 2st + t^2)} \end{aligned}$$

ここで、

$$PQ = 1$$

$$\Leftrightarrow (s - t)^2 + s^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2s^2 - 2st + t^2 = 1$$

であることを用いると、 $OR = \sqrt{2}$ (答) $OR = \sqrt{2}$ (2) $R(X, Y)$ とおくと、

$$X = t, Y = t - 2s$$

なので、これを s, t について解くと

$$s = \frac{X - Y}{2}, t = X$$

これらを $(s - t)^2 + s^2 = 1$ に代入すると

$$\begin{aligned} \left(-\frac{X + Y}{2}\right)^2 + \left(\frac{X - Y}{2}\right)^2 &= 1 \\ \therefore X^2 + Y^2 &= 2 \end{aligned}$$

これは原点を中心とした半径 $\sqrt{2}$ の円である。また、 $s \leq 0, 0 < t \leq 1$ より

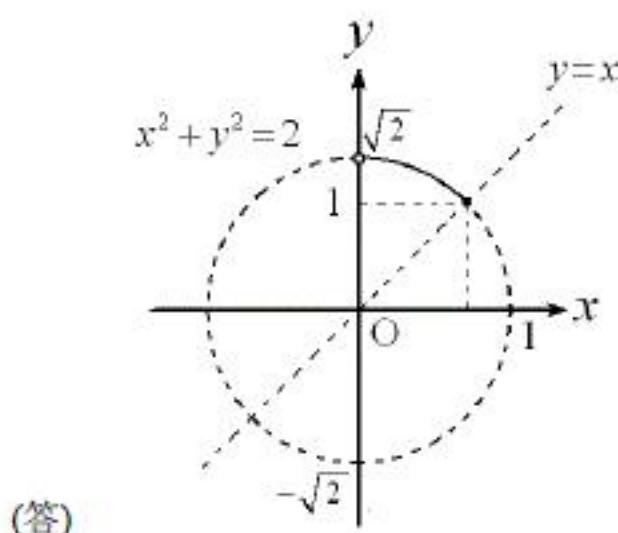
$$\frac{X - Y}{2} \leq 0, 0 < X \leq 1$$

$$\therefore Y \geq X, 0 < X \leq 1$$

以上より R の軌跡は

$$x^2 + y^2 = \sqrt{2} \quad (y \geq x, 0 < x \leq 1)$$

これを図示すると次図の実線部となる。(白丸は含まない)



(答)

(3) $\angle ROP = 60^\circ$ であることより、R の座標は

$$\left(\sqrt{2} \cos 60^\circ, \sqrt{2} \sin 60^\circ\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

である。よって、

$$s = \frac{X - Y}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$t = X = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

求める面積 S は

$$S = \triangle OPQ + \triangle PQR$$

$$= -\frac{1}{2}st + \frac{1}{2}Y(t - s)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{8} + \frac{\sqrt{6}}{4} \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{8} + \frac{3 + \sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{4}$$

(答) $\frac{\sqrt{3} + 1}{4}$

(1) 以下, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OH}=\vec{h}$ とおく。

$\vec{h} \cdot \overrightarrow{AB}=0$ より,

$$\begin{aligned}\{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\} \cdot (\vec{b}-\vec{a}) &= (2t-1)\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{a}|^2 t + |\vec{b}|^2 (1-t) \\ &= (2t-1)\vec{a} \cdot \vec{b} - a^2 t + 1 - t \\ &= 0\end{aligned}$$

$a > 1$ より $1-t > t \Leftrightarrow 2t-1 < 0$ なるので,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{a^2 t + t - 1}{2t-1}$$

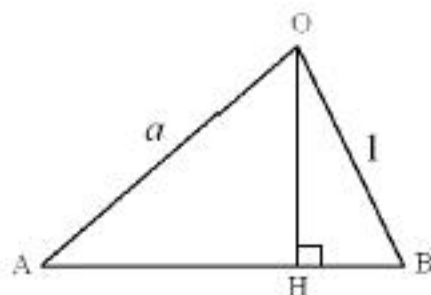
$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{a^2 t + t - 1}{2t-1}$$

(2) 余弦定理より,

$$AB^2 = a^2 + 1^2 - 2a \cos \angle AOB$$

$$\begin{aligned}&= a^2 + 1 - 2a \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ &= a^2 + 1 - 2 \cdot \frac{a^2 t + t - 1}{2t-1} \\ &= \frac{1-a^2}{2t-1}\end{aligned}$$

$$\text{よって, } AB = \sqrt{\frac{1-a^2}{2t-1}}$$



$$(\text{答}) \quad AB = \sqrt{\frac{1-a^2}{2t-1}}$$

(3) $AB=OA$ のとき, $\sqrt{\frac{1-a^2}{2t-1}}=a$ である。

両辺正より, 2乗しても同値性は失われない。

$$\begin{aligned}\frac{1-a^2}{2t-1} &= a^2 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{2a^2}\end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad t = \frac{1}{2a^2}$$

4

(1) C_1 と C_2 の交点の x 座標は、次の方程式の解である。

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{3}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0\end{aligned}$$

$0 \leq x \leq \pi$ のとき $\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4}{3}\pi$ なので、この解は

$$x + \frac{\pi}{3} = \pi \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}\pi$$

よって、 $a = \frac{2}{3}\pi$

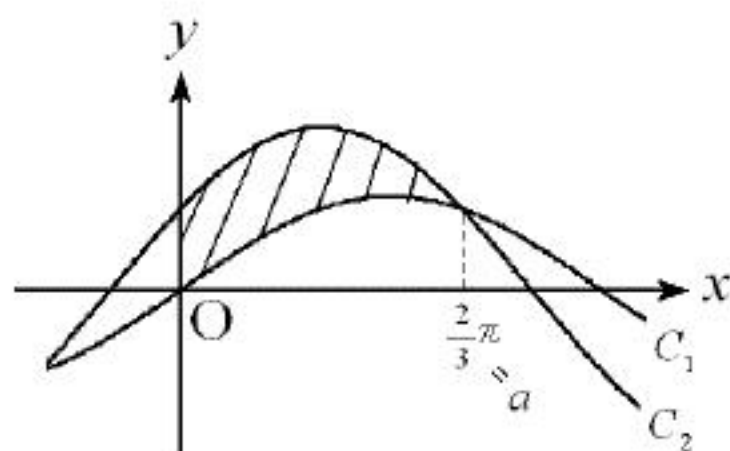
$$(\text{答}) \quad a = \frac{2}{3}\pi$$

$$(2) \quad y = \frac{3}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

よって、 C_2 は $y = \sqrt{3}\sin x$ を x 軸方向に $-\frac{\pi}{6}$ だけ平行移動して得られる。

$$(\text{答}) \quad b = \sqrt{3}, \theta = -\frac{\pi}{6}$$

(3) 求めるのは、次図の斜線部を x 軸まわりに回転させてできる立体の体積である。



$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^a \left\{ \left(\frac{3}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \right)^2 - \sin^2 x \right\} dx \\ &= \pi \int_0^a \left\{ 3\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin^2 x \right\} dx \\ &= \pi \int_0^a \left[\frac{3}{2} \left\{ 1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \right\} - \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \right] dx \\ &= \pi \int_0^a \left\{ 1 - \frac{3}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\cos 2x \right\} dx \\ &= \pi \left[x - \frac{3}{4}\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^a \\ &= \pi \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \\ &= \frac{\pi}{24}(16\pi + 15\sqrt{3})\end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{24}(16\pi + 15\sqrt{3})$$