

1

(1)

点 P の座標が (4,1) であるためには, 4 回の試行のうち, 表が 3 回, 裏が 1 回出ればよい。

1 回コインを投げて表・裏が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ なので, 求める確率は

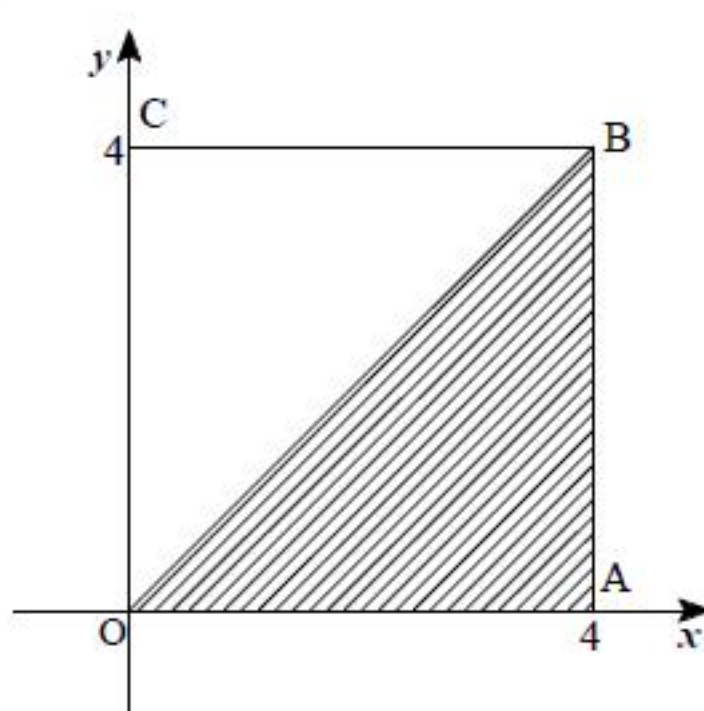
$${}_4C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

(答) $\frac{1}{4}$

(2)

4 回の試行の結果できる三角形 OPQ の面積について考える。

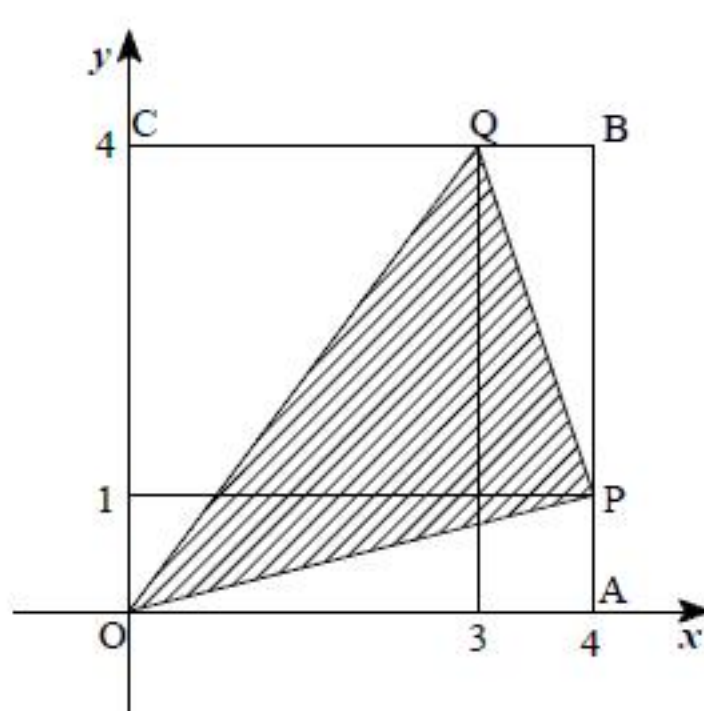
[1] 表が 4 回出るとき



三角形 OPQ は, 上図斜線部のようになるので, 面積は

$$4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8$$

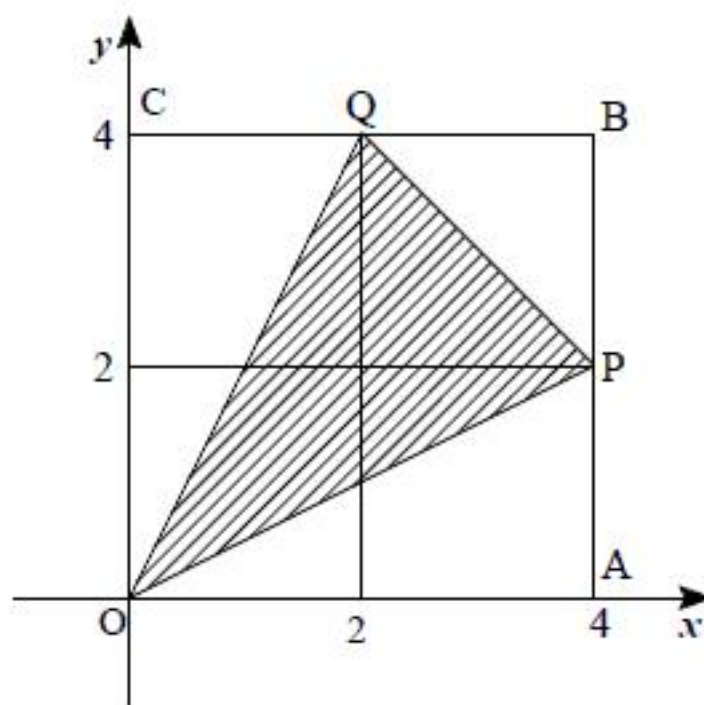
[2] 表が 3 回, 裏が 1 回出るとき



三角形 OPQ は, 上図斜線部のようになるので, 面積は

$$4 \times 4 - 4 \times 1 \times \frac{1}{2} - 1 \times 3 \times \frac{1}{2} - 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$$

[3] 表が 2 回, 裏が 2 回出るとき



三角形 OPQ は, 上図斜線部のようになるので, 面積は

$$4 \times 4 - 4 \times 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times 4 \times \frac{1}{2} = 6$$

[4] 表が 1 回, 裏が 3 回出るとき

三角形 OPQ の面積は, [2] で求めた面積と等しく, $\frac{13}{2}$

[5] 裏が 4 回出るとき

三角形 OPQ の面積は, [1] で求めた面積と等しく, 8

以上より, ゲームの得点が 8 になるためには, 4 回の試行の結果が全て表, または全て裏であればよく, これが起こる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$$

(答) $\frac{1}{8}$

(3)

[1] ゲームの得点が 8 になるとき

この確率は, (2) の答より $\frac{1}{8}$ である。

[2] ゲームの得点が $\frac{13}{2}$ になるとき

4 回コインを投げて, 表が 3 回, または 1 回出ればよいので, この確率は

$${}_4C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_4C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2}$$

[3] ゲームの得点が 6 になるとき

4 回コインを投げて, 表が 2 回出ればよいので, この確率は

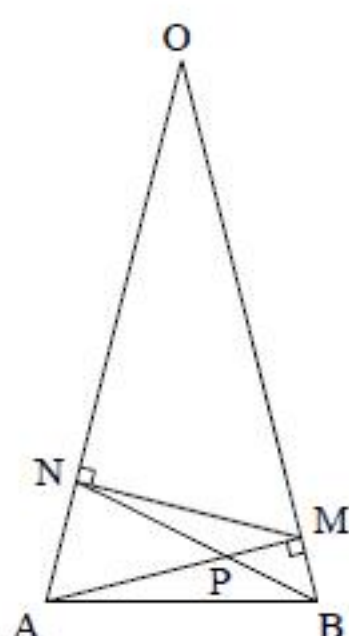
$${}_4C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$$

以上より, 求める期待値は

$$8 \times \frac{1}{8} + \frac{13}{2} \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{3}{8} = \frac{13}{2}$$

(答) $\frac{13}{2}$

(1)



$OM \perp AM$ なので、 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ である。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} \\ &= s\vec{b} - \vec{a}\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AM} &= 0 \\ \Leftrightarrow s\vec{b} \cdot (s\vec{b} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow s^2 - sk &= 0 \quad (\because |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = k) \\ \Leftrightarrow s(s - k) &= 0\end{aligned}$$

$\triangle OAB$ は鋭角三角形なので、 $\angle AOB < 90^\circ$ であり、 $s > 0$ である。

よって、 $s = k$ となる。

同様に、 $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{MN} &= 0 \\ \Leftrightarrow t\vec{a} \cdot (t\vec{a} - k\vec{b}) &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - tk^2 &= 0 \quad (\because |\vec{a}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = k) \\ \Leftrightarrow t(t - k^2) &= 0\end{aligned}$$

やはり、 $\triangle OAB$ が鋭角三角形であることから、 $t > 0$ であり、 $t = k^2$ となる。

(答) $s = k, t = k^2$

(2)

点 P は線分 AM 上にあるので、 $AP : PM = l : 1 - l$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= l\overrightarrow{OM} + (1 - l)\overrightarrow{OA} \\ &= (1 - l)\vec{a} + lk\vec{b} \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と表せる。また、点 P は線分 BN 上にもあるので、 $NP : PB = m : 1 - m$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= m\overrightarrow{OB} + (1 - m)\overrightarrow{ON} \\ &= (1 - m)k^2\vec{a} + m\vec{b} \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

とも表せる。 $\vec{a}, \vec{b}$ は互いに一次独立なので、①, ②の係数を比較して

$$\begin{cases} 1 - l = (1 - m)k^2 \\ lk = m \end{cases}$$

これを解くと

$$\begin{cases} l = \frac{1 + k}{1 + k + k^2} \\ m = \frac{k + k^2}{1 + k + k^2} \end{cases}$$

よって、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{k^2}{1 + k + k^2} \vec{a} + \frac{k + k^2}{1 + k + k^2} \vec{b}$$

$$(答) \overrightarrow{OP} = \frac{k^2}{1 + k + k^2} \vec{a} + \frac{k + k^2}{1 + k + k^2} \vec{b}$$

(3)

P が線分 BN を 4 : 3 に内分するとき、 $NP : PB = \frac{3}{7} : \frac{4}{7}$ なので、

(2) で定義した m が $\frac{3}{7}$ に等しくなる。

$$\begin{aligned}\frac{k + k^2}{1 + k + k^2} &= \frac{3}{7} \\ \Leftrightarrow 4k^2 + 4k - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2k - 1)(2k + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{1}{2} \quad (\because 0 < k < 1)\end{aligned}$$

よって、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \angle AOB = \frac{1}{2}$ なので、 $\angle AOB = 60^\circ$ である。

さらに、 $\triangle OAB$ は二等辺三角形であるから、残りの 2 つの角も 60° になる。

以上より、 $\triangle OAB$ が正三角形であることが示された。

(証明終)

(1)

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$$

よって、数列 $\{a_n + 1\}$ は初項 $k+1$ 、公比 2 の等比数列である。

したがって

$$a_n + 1 = (k+1) \cdot 2^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow a_n = (k+1) \cdot 2^{n-1} - 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

よって、 $n=1, 2, 3, \dots$ に対して

$$\begin{aligned} a_{n+4} - a_n &= (k+1)(2^{n+3} - 2^{n-1}) \\ &= 15(k+1) \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

となるので、 $a_{n+4} - a_n$ は 15 で割り切れることが示された。

(証明終)

(2)

(1)の結果を用いると、 a_{2010} はある整数 p を用いて

$$a_{2010} = 15p + a_{2006}$$

と表せる。これより、 a_{2010} が 15 の倍数となることと、 a_{2006} が 15 の倍数となることは同値である。同様に、 a_{2010} が 15 の倍数となることと、 a_{2002} が 15 の倍数となることは同値である。これを繰り返せば、 a_{2010} が 15 の倍数となることと、 a_2 が 15 の倍数となることが同値であると分かる。

よって、 $a_2 = 2k+1$ が 15 の倍数となるような最小の k を求めればよい。

$a_2 = 2k+1$ の値は、 $k=1, 2, 3, \dots$ に対して順番に、

$$3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots$$

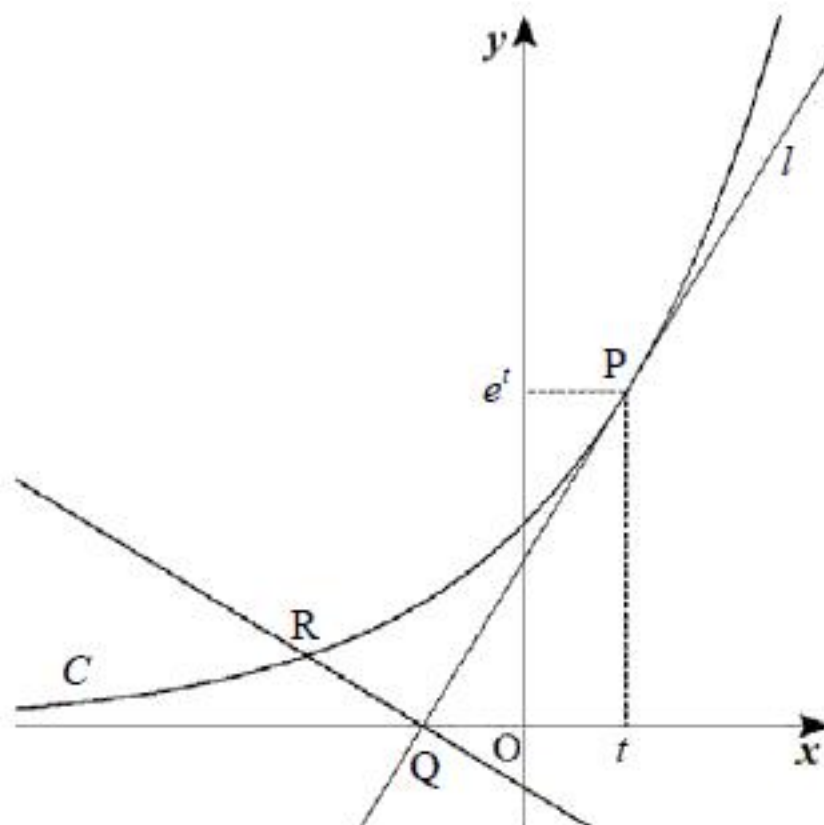
となるので、求める k の値は、 $k=7$ である。

(答) $k=7$

4

(A)

(1)



$y = e^x$ を微分すると $y' = e^x$ となるので、 C 上の点 P における接線の方程式は

$$y = e^t(x - t) + e^t$$

である。点 Q は、この接線上で y 座標が 0 の点なので、その x 座標は

$$0 = e^t(x - t + 1)$$

$$\therefore x = t - 1$$

と求まる。

(答) $t - 1$

(2)

直線 RQ は直線 PQ の法線なので、 $\angle PQR = 90^\circ$ である。

よって、 $\triangle PQR$ の外接円の直径は PR であり、その中心は線分 PR の中点と等しい。

よって、 $R(r, e^r)$ とおくと、 $\triangle PQR$ の外心が y 軸上にあるとき

$$\frac{r+t}{2} = 0 \Leftrightarrow r = -t$$

となる。よって、 R の座標は $R(-t, e^{-t})$ である。

ここで、 Q を通り l に直交する直線の方程式は

$$y = -e^{-t}(x - t + 1)$$

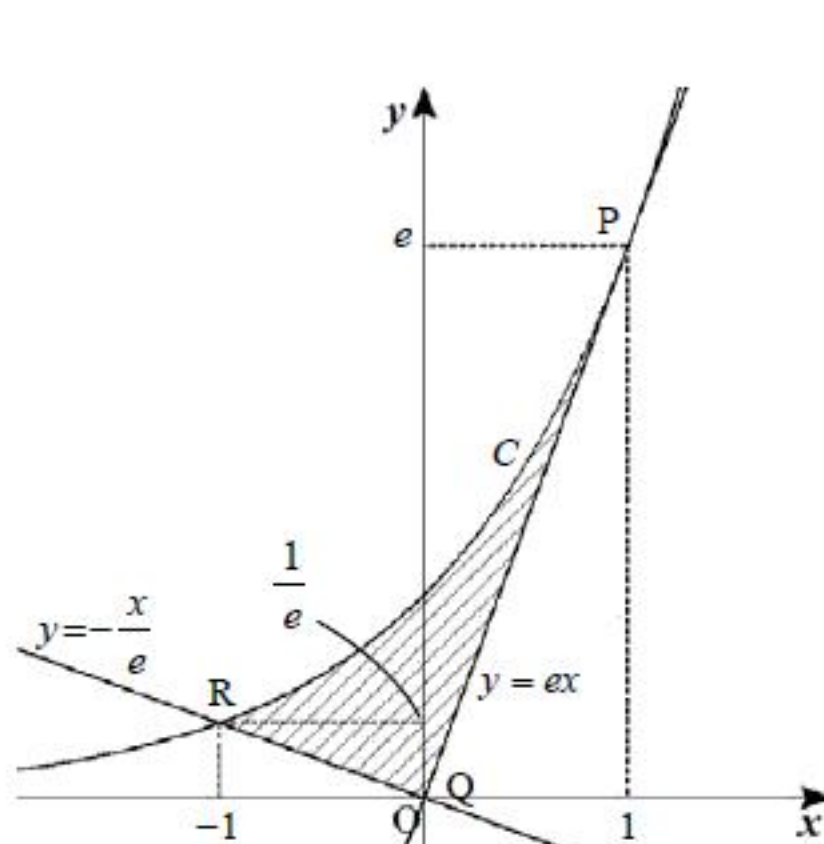
であり、この直線が点 R を通ることから、

$$e^{-t} = -e^{-t}(-t - t + 1)$$

$$\therefore t = 1$$

(答) $t = 1$

(3)



求めるのは、上図斜線部を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積であり、

$$\int_{-1}^1 \pi (e^x)^2 dx - e^2 \times \pi \times 1 \times \frac{1}{3} - (e^{-1})^2 \times \pi \times 1 \times \frac{1}{3}$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_{-1}^1 - \frac{\pi}{3} e^2 - \frac{\pi}{3} e^{-2}$$

$$= \frac{\pi}{6} e^2 - \frac{5\pi}{6} e^{-2}$$

と求まる。

(答) $\frac{\pi}{6} e^2 - \frac{5\pi}{6} e^{-2}$

(B)

(1)

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-x}^x f(t) dt \\ &= \int_{-x}^x (t^2 + 4t + k) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} + 2t^2 + kt \right]_{-x}^x \\ &= \frac{2}{3} x^3 + 2kx \end{aligned}$$

なので、

$$g'(x) = 2x^2 + 2k$$

$g(x)$ が $x = 2$ で極値をもつので

$$g'(2) = 8 + 2k = 0$$

$$\Leftrightarrow k = -4$$

(答) $k = -4$

(2)

(1)より、 $g'(x) = 2x^2 - 8$ なので、 $g'(x) = 0$ を解くと、

$$2x^2 - 8 = 0$$

$$\therefore x = \pm 2$$

よって、 $g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	-2	...	2	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	$\frac{32}{3}$	↘	$-\frac{32}{3}$	↗

増減表より、 $g(x)$ の極大値は $\frac{32}{3}$ ($x = -2$ のとき)、極小値は $-\frac{32}{3}$ ($x = 2$ のとき) である。

(答) 極大値 $\frac{32}{3}$ ($x = -2$ のとき)、極小値 $-\frac{32}{3}$ ($x = 2$ のとき)

(3)

$$f'(x) = 2x + 4$$

なので、

$$f'(a) = 2a + 4 \dots \textcircled{1}$$

また、

$$g'(x) = 2x^2 - 8$$

なので、

$$g'(a) = 2a^2 - 8 \dots \textcircled{2}$$

接線 l, m が平行になるとき、 $f'(a) = g'(a)$ が成り立つので、 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を用いると

$$2a + 4 = 2a^2 - 8$$

$$\Leftrightarrow (a + 2)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

このとき

$$f(a) = 17, g(a) = -6, f'(a) = g'(a) = 10$$

なので、 l の方程式は

$$y = 10(x - 3) + 17$$

$$= 10x - 13$$

となり、 m の方程式は

$$y = 10(x - 3) - 6$$

$$= 10x - 36$$

となる。

(答) $a = 3, l: y = 10x - 13, m: y = 10x - 36$