

1

(1)

点 D, E は直線 OB 上にあるので, s, t を実数として,

$$\begin{cases} \overrightarrow{OD} = s\overrightarrow{OB} = s\vec{b} \\ \overrightarrow{OE} = t\overrightarrow{OB} = t\vec{b} \end{cases}$$

とおける。 $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{DA}$ であるから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{DA} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{b} \cdot (\vec{a} - s\vec{b}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{b} \cdot \vec{a} - s|\vec{b}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4 - 5s &= 0 \\ \therefore s &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\overrightarrow{DA} = \vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b}$$

である。また, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{EC}$ であるから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{EC} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{b} \cdot (\vec{c} - t\vec{b}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} - t|\vec{b}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - 5t &= 0 \\ \therefore t &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\overrightarrow{EC} = \vec{c} - \frac{1}{5}\vec{b}$$

である。

$$(\text{答}) \begin{cases} \overrightarrow{DA} = \vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b} \\ \overrightarrow{EC} = \vec{c} - \frac{1}{5}\vec{b} \end{cases}$$

(2)

(1)より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{DA}|^2 &= \left| \vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b} \right|^2 \\ &= \left| \vec{a} \right|^2 - \frac{8}{5}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{16}{25}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{9}{5} \\ \therefore |\overrightarrow{DA}| &= \frac{3}{\sqrt{5}} \\ |\overrightarrow{EC}|^2 &= \left| \vec{c} - \frac{1}{5}\vec{b} \right|^2 \\ &= |\vec{c}|^2 - \frac{2}{5}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{25}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{4}{5} \\ \therefore |\overrightarrow{EA}| &= \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

であり, また,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EC} &= \left(\vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b} \right) \cdot \left(\vec{c} - \frac{1}{5}\vec{b} \right) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{1}{5}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{4}{5}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{4}{25}|\vec{b}|^2 \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{4}{5} \end{aligned}$$

である。ここで,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CA}|^2 &= |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 \\ &= 6 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

より, $|\overrightarrow{CA}|$ が最小のとき $\vec{a} \cdot \vec{c}$ は最大となり, $|\overrightarrow{CA}|$ が最大のとき $\vec{a} \cdot \vec{c}$ は最小となる。 $|\overrightarrow{CA}|$ が最

小となるのは $\overrightarrow{DA}$ と $\overrightarrow{EC}$ のなす角が 0° のときであり, このとき

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EC}}{|\overrightarrow{DA}||\overrightarrow{EC}|} &= 1 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EC} &= |\overrightarrow{DA}||\overrightarrow{EC}| \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{4}{5} &= \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{c} &= 2 \end{aligned}$$

となる。 $|\overrightarrow{CA}|$ が最大となるのは $\overrightarrow{DA}$ と $\overrightarrow{EC}$ のなす角が 180° のときであり, このとき

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EC}}{|\overrightarrow{DA}||\overrightarrow{EC}|} &= -1 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EC} &= -|\overrightarrow{DA}||\overrightarrow{EC}| \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{4}{5} &= -\frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{c} &= -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

となる。したがって, 内積 $\vec{a} \cdot \vec{c}$ のとりうる値の範囲は

$$-\frac{2}{5} \leq \vec{a} \cdot \vec{c} \leq 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{2}{5} \leq \vec{a} \cdot \vec{c} \leq 2$$

(3)

点 C から $\triangle OAB$ におろした垂線の足を点 H とすると, k を実数として,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CH} &= \overrightarrow{CE} + k\overrightarrow{DA} \\ &= k\vec{a} + \left(-\frac{4}{5}k + \frac{1}{5} \right) \vec{b} - \vec{c} \end{aligned}$$

と表せる。 $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{OA}$ であるから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OA} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ k\vec{a} + \left(-\frac{4}{5}k + \frac{1}{5} \right) \vec{b} - \vec{c} \right\} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow k|\vec{a}|^2 + \left(-\frac{4}{5}k + \frac{1}{5} \right) \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{c} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow 5k + \frac{4}{5}(-4k + 1) - \vec{a} \cdot \vec{c} &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} &= \frac{9}{5}k + \frac{4}{5} \end{aligned}$$

である。ここで, $\triangle OAB$ の面積は,

$$\frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{25 - 16} = \frac{3}{2}$$

であるから, 四面体 OABC の体積を V とすると,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot |\overrightarrow{CH}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{CH}|$$

である。ここで,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CH}|^2 &= \left\{ k\vec{a} + \left(-\frac{4}{5}k + \frac{1}{5} \right) \vec{b} - \vec{c} \right\}^2 \\ &= k^2 |\vec{a}|^2 + \left(-\frac{4}{5}k + \frac{1}{5} \right)^2 |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2k \left(-\frac{4}{5}k + \frac{1}{5} \right) \vec{a} \cdot \vec{b} - 2 \left(-\frac{4}{5}k + \frac{1}{5} \right) \vec{b} \cdot \vec{c} - 2k\vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= 5k^2 + 5 \left(-\frac{4}{5}k + \frac{1}{5} \right)^2 + 1 + 8k \left(-\frac{4}{5}k + \frac{1}{5} \right) - 2 \left(-\frac{4}{5}k + \frac{1}{5} \right) - 2k \left(\frac{9}{5}k + \frac{4}{5} \right) \\ &= -\frac{9}{5}k^2 + \frac{4}{5} \end{aligned}$$

であるから, $k=0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{4}{5}$ (これは①を満たす) のとき, $|\overrightarrow{CH}|$ は最大値

$$\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

をとり, このとき V も最大値

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{4}{5}, \text{体積の最大値 } \frac{1}{\sqrt{5}}$$

2

(1)

ルール a) より,

$$a_1 = p$$

が成り立つ。また, ルール b) より,

$$a_{n+1} = a_n p + (1 - a_n)(1 - p) = (2p - 1)a_n + 1 - p$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p - 1)\left(a_n - \frac{1}{2}\right)$$

が成り立つ。よって数列 $\left\{a_n - \frac{1}{2}\right\}$ は, 初項 $a_1 - \frac{1}{2} = p - \frac{1}{2}$, 公比 $2p - 1$ の等比数列であるから,

$$a_n - \frac{1}{2} = \left(p - \frac{1}{2}\right)(2p - 1)^{n-1} = \frac{1}{2}(2p - 1)^n$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2}(2p - 1)^n + \frac{1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{1}{2}(2p - 1)^n + \frac{1}{2}$$

(2)

ルール c) より,

$$\begin{aligned} E_k &= 3ka_k + k(1 - a_k) \\ &= 2ka_k + k \\ &= 2k\left\{\frac{1}{2}(2p - 1)^k + \frac{1}{2}\right\} + k \\ &= k(2p - 1)^k + 2k \end{aligned}$$

である。以下, 式を見やすくするため, $2p - 1 = x$ と表すことにする。このとき,

$$\sum_{k=1}^n E_k = \sum_{k=1}^n kx^k + 2\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n kx^k + n(n+1) \quad \dots\dots ①$$

となる。ここで,

$$\sum_{k=1}^n kx^k = 1 \cdot x^1 + 2 \cdot x^2 + \dots + n \cdot x^n \quad \dots\dots ②$$

$$x \sum_{k=1}^n kx^k = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 + \dots + (n-1) \cdot x^n + n \cdot x^{n+1} \quad \dots\dots ③$$

であるから, ② - ③を考えると,

$$\begin{aligned} (1-x) \sum_{k=1}^n kx^k &= x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + x^n - nx^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n x^k - nx^{n+1} \\ &= \frac{x(1-x^n)}{1-x} - nx^{n+1} \\ &= \frac{1}{1-x} \{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}\} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって

$$\sum_{k=1}^n kx^k = \frac{1}{(1-x)^2} \{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}\}$$

となる。よって①は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n E_k &= \frac{1}{(1-x)^2} \{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}\} + n(n+1) \\ &= \frac{1}{\{1 - (2p-1)\}^2} \{(2p-1) - (n+1)(2p-1)^{n+1} + n(2p-1)^{n+2}\} + n(n+1) \\ &= \frac{2p-1}{4(1-p)^2} \{1 + (2p-1)^n (2pn - 2n - 1)\} + n(n+1) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=1}^n E_k = \frac{2p-1}{4(1-p)^2} \{1 + (2p-1)^n (2pn - 2n - 1)\} + n(n+1)$$

(3)

$$f_n(p) = \frac{1}{2}(2p-1)^n + \frac{1}{2}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f_n\left(\frac{k}{2m}\right) &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(p) dp \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2}(2p-1)^n + \frac{1}{2} \right\} dp \\ &= \left[\frac{1}{2(n+1)} (2p-1)^{n+1} + p \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2(n+1)} \{0 - (-1)^{n+1}\} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1} + 1 \right\} \end{aligned}$$

となる。

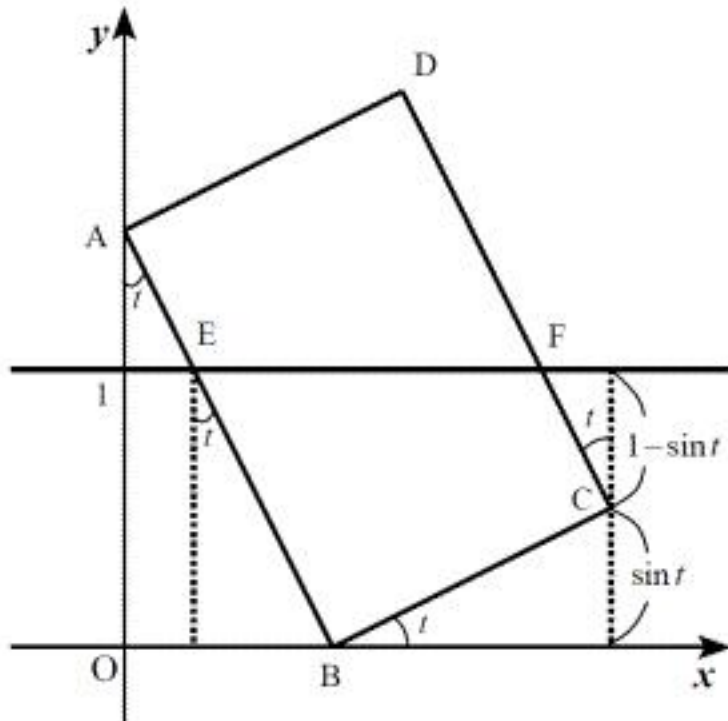
$$(\text{答}) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f_n\left(\frac{k}{2m}\right) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1} + 1 \right\}$$

3

(1)

直線 AB, CD, DA と直線 $y=1$ の交点をそれぞれ点 E, F, G とする。
頂点 A の y 座標は $2\cos t$ である。

[1] $2\cos t \geq 1 \Leftrightarrow 0 < t \leq \frac{\pi}{3}$ のとき



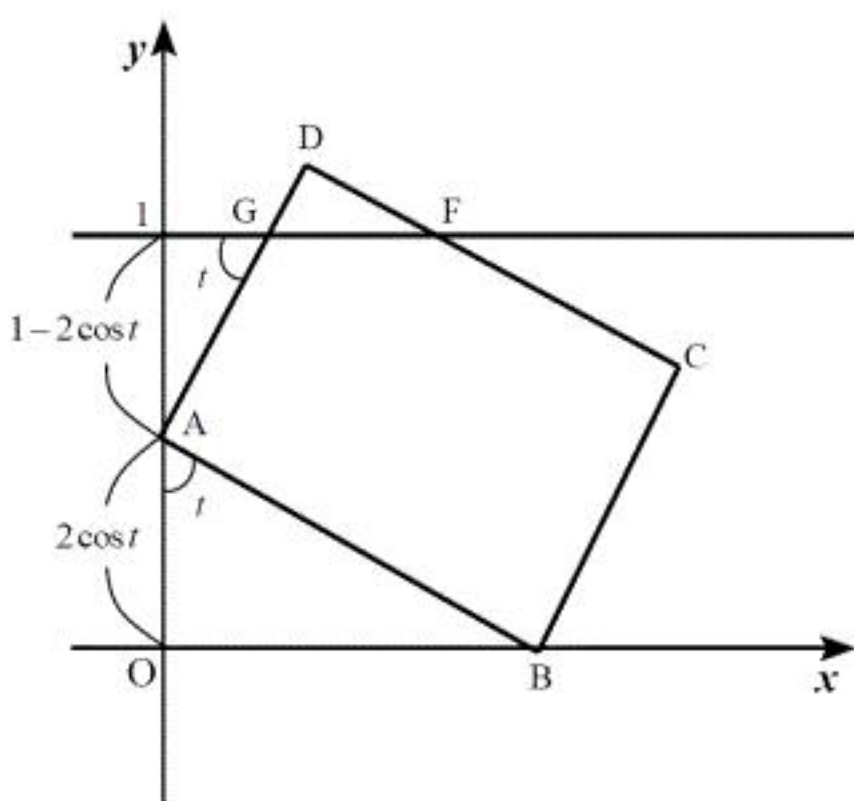
$$BE = \frac{1}{\cos t}, CF = \frac{1 - \sin t}{\cos t}$$

であるから,

$$\begin{aligned} f(t) &= BE + BC + CF \\ &= \frac{1}{\cos t} + 1 + \frac{1 - \sin t}{\cos t} \\ &= \frac{2 + \cos t - \sin t}{\cos t} \end{aligned}$$

となる。

[2] $2\cos t < 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{2}$ のとき



$$AG = \frac{1 - 2\cos t}{\sin t}, CF = \frac{1 - \sin t}{\cos t}$$

であるから,

$$\begin{aligned} f(t) &= AG + AB + BC + CF \\ &= \frac{1 - 2\cos t}{\sin t} + 2 + 1 + \frac{1 - \sin t}{\cos t} \\ &= 3 + \frac{1 - 2\cos t}{\sin t} + \frac{1 - \sin t}{\cos t} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(t) = \begin{cases} \frac{2 + \cos t - \sin t}{\cos t} & (0 < t \leq \frac{\pi}{3}) \\ 3 + \frac{1 - 2\cos t}{\sin t} + \frac{1 - \sin t}{\cos t} & (\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

(2)

[1] $0 < t \leq \frac{\pi}{3}$ のとき

$$\frac{2 + \cos t - \sin t}{\cos t} = 3$$

$$\Leftrightarrow 2 + \cos t - \sin t = 3\cos t$$

$$\Leftrightarrow \sin t = 2 - 2\cos t$$

・・・①

である。①を,

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

に代入すると,

$$(2 - 2\cos t)^2 + \cos^2 t = 1$$

$$\Leftrightarrow 5\cos^2 t - 8\cos t + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos t - 1)(5\cos t - 3) = 0$$

となり, $\frac{1}{2} \leq \cos t < 1$ であるから,

$$\cos t = \frac{3}{5}$$

となる。このとき①より,

$$\sin t = 2 - 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

となる。

[2] $\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} f(t) &= AG + (AB + BC) + CF \\ &= 3 + AG + CF > 3 \end{aligned}$$

となるので, $f(t) = 3$ とはならない

以上[1], [2]より, $f(t) = 3$ が成り立つとき,

$$\cos t = \frac{3}{5}, \sin t = \frac{4}{5}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \cos t = \frac{3}{5}, \sin t = \frac{4}{5}$$

(3)

$\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{2}$ のときは $f(t) > 3$ であるから, $0 < t \leq \frac{\pi}{3}$ のときを考えればよい。

このとき,

$$f(t) = \frac{2 + \cos t - \sin t}{\cos t} = \frac{2 - \sin t}{\cos t} + 1$$

であるから,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{(-\cos t)\cos t - (2 - \sin t)(-\sin t)}{\cos^2 t} \\ &= \frac{2\sin t - 1}{\cos^2 t} \end{aligned}$$

である。 $f'(t) = 0$ とすると, $0 < t \leq \frac{\pi}{3}$ より,

$$\frac{2\sin t - 1}{\cos^2 t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin t = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6}$$

であるから, $f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	(0)	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{3}$
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$		$\searrow$	$\sqrt{3} + 1$	$\nearrow$	

増減表より, $f(t)$ は $t = \frac{\pi}{6}$ のとき最小値 $\sqrt{3} + 1$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値 } \sqrt{3} + 1 \quad (t = \frac{\pi}{6} \text{ のとき})$$

4

(1)

ハミルトン・ケーリーの定理より,

$$\begin{aligned} A^2 - \left(-\frac{1}{p}\right)A + \left\{\left(p - \frac{1}{p}\right)(-p) - 2\right\}E &= 0 \\ \Leftrightarrow A^2 &= -\frac{1}{p}A + (p^2 + 1)E \end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= aA + bE \\ \Leftrightarrow E &= aA^2 + bA \\ \Leftrightarrow E &= a\left\{-\frac{1}{p}A + (p^2 + 1)E\right\} + bA \\ \Leftrightarrow \left(-\frac{a}{p} + b\right)A + (ap^2 + a - 1)E &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $A \neq kE$ (k は実数) であるから,

$$\begin{cases} -\frac{a}{p} + b = 0 \\ ap^2 + a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{p^2 + 1} \\ b = \frac{1}{p(p^2 + 1)} \end{cases}$$

となる。

$$(答) \begin{cases} a = \frac{1}{p^2 + 1} \\ b = \frac{1}{p(p^2 + 1)} \end{cases}$$

(2)

$$\begin{aligned} E + C &= E + AB \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p - \frac{1}{p} & 1 \\ 2 & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{p} & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & -1 \\ 1 & p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + p & -1 \\ 1 & 1 + p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、この行列の行列式を Δ とすると,

$$\Delta = (1 + p)^2 + 1 \geq 1$$

となる。したがって、 $E + C$ の逆行列は存在する。

次に,

$$\begin{aligned} E - C + C^2 - C^3 + \cdots - C^{2m-1} &= (E - C^{2m})(E + C)^{-1} \\ \Leftrightarrow (E - C + C^2 - C^3 + \cdots - C^{2m-1})(E + C) &= E - C^{2m} \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを、 m に関する数学的帰納法で示す。

[1] $m = 1$ のとき

$$(\textcircled{1} \text{の左辺}) = (E - C)(E + C) = E - C^2 = (\textcircled{1} \text{の右辺})$$

となるから、 $\textcircled{1}$ は成り立つ。

[2] $m = k$ のとき、 $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定すると

$$(E - C + C^2 - C^3 + \cdots - C^{2k-1})(E + C) = E - C^{2k}$$

が成り立つ。このとき,

$$\begin{aligned} &(E - C + C^2 - C^3 + \cdots - C^{2(k+1)-1})(E + C) \\ &= (E - C + C^2 - C^3 + \cdots - C^{2k-1})(E + C) + (C^{2k} - C^{2k+1})(E + C) \\ &= (E - C^{2k}) + C^{2k} - C^{2k+2} \\ &= E - C^{2(k+1)} \end{aligned}$$

であるから、 $n = k + 1$ のときも $\textcircled{1}$ は成り立つ。

以上[1], [2]より、自然数 m に対して $\textcircled{1}$ が成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

(2)の式において $m = 3n$ とすると,

$$\begin{aligned} D_n &= E - C + C^2 - C^3 + \cdots - C^{6n-1} \\ &= (E - C^{6n})(E + C)^{-1} \end{aligned}$$

である。ここで,

$$\begin{aligned} C^{6n} &= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{6n} \\ &= \left[2 \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \right]^{6n} \\ &= 2^{6n} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}^{6n} \\ &= 2^{6n} \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\pi}{6} \cdot 6n \right) & -\sin \left(\frac{\pi}{6} \cdot 6n \right) \\ \sin \left(\frac{\pi}{6} \cdot 6n \right) & \cos \left(\frac{\pi}{6} \cdot 6n \right) \end{pmatrix} \\ &= 2^{6n} \begin{pmatrix} \cos n\pi & -\sin n\pi \\ \sin n\pi & \cos n\pi \end{pmatrix} \\ &= 2^{6n} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \\ &= 2^{6n} \cdot (-1)^n E \\ (E + C)^{-1} &= \frac{1}{(1 + \sqrt{3})^2 + 1} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & 1 \\ -1 & 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} D_n &= (E - C^{6n})(E + C)^{-1} \\ &= \{1 - 2^{6n} \cdot (-1)^n\} E \cdot \frac{1}{(1 + \sqrt{3})^2 + 1} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & 1 \\ -1 & 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1 - 2^{6n} \cdot (-1)^n}{(1 + \sqrt{3})^2 + 1} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & 1 \\ -1 & 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。したがって,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= D_n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1 - 2^{6n} \cdot (-1)^n}{(1 + \sqrt{3})^2 + 1} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & 1 \\ -1 & 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1 - 2^{6n} \cdot (-1)^n}{5 + 2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 5 + 2\sqrt{3} \\ 1 + 3\sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1 - 2^{6n} \cdot (-1)^n}{5 + 2\sqrt{3}} \cdot (5 + 2\sqrt{3}) = 1 - 2^{6n} \cdot (-1)^n \\ \frac{y_n}{x_n} &= \frac{1 + 3\sqrt{3}}{5 + 2\sqrt{3}} = \frac{(1 + 3\sqrt{3})(5 - 2\sqrt{3})}{25 - 12} = -1 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \begin{cases} x_n = 1 - 2^{6n} \cdot (-1)^n \\ \frac{y_n}{x_n} = -1 + \sqrt{3} \end{cases}$$