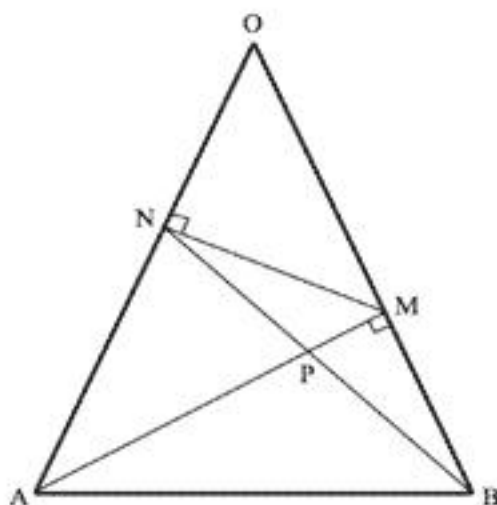


1

(1)



$\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{AM}$  であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AM} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) &= 0 \\ \Leftrightarrow s\vec{b} \cdot (s\vec{b} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow s^2 \left| \vec{b} \right|^2 - s\vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow s^2 - sk &= 0 \\ \Leftrightarrow s(s-k) &= 0 \\ \therefore s = k \quad (\because s \neq 0)\end{aligned}$$

となる。また、 $\overrightarrow{ON} \perp \overrightarrow{MN}$  であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{MN} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{ON} \cdot (\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) &= 0 \\ \Leftrightarrow t\vec{a} \cdot (t\vec{a} - k\vec{b}) &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 \left| \vec{a} \right|^2 - kta \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - tk^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow t(t-k^2) &= 0 \\ \therefore t = k^2 \quad (\because t \neq 0)\end{aligned}$$

となる。

(答)  $s = k, t = k^2$

(2)

$p, q$  を実数とする。点 P が線分 AM 上にあることから、

$$\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{OA} + (1-p)\overrightarrow{OM} = p\vec{a} + (1-p)k\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}$$

とおける。また、点 P が線分 BN 上にあることから、

$$\overrightarrow{OP} = q\overrightarrow{OB} + (1-q)\overrightarrow{ON} = (1-q)k^2\vec{a} + q\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}$$

とおける。①、②より、

$$\begin{aligned}\begin{cases} p = (1-q)k^2 \\ (1-p)k = q \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{k^2}{1+k+k^2} \\ q = \frac{k+k^2}{1+k+k^2} \end{cases}\end{aligned}$$

であるから、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{k^2}{1+k+k^2}\vec{a} + \frac{k+k^2}{1+k+k^2}\vec{b}$$

となる。

$$(答) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{k^2}{1+k+k^2}\vec{a} + \frac{k+k^2}{1+k+k^2}\vec{b}$$

(3)

点 P が線分 BN を 4:3 に内分するので、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{4}{7}\overrightarrow{ON} + \frac{3}{7}\overrightarrow{OB} = \frac{4}{7}k^2\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b}$$

である。これを、(2)の結果と比較すると、

$$\begin{aligned}\begin{cases} \frac{4}{7}k^2 = \frac{k^2}{1+k+k^2} \\ \frac{3}{7} = \frac{k+k^2}{1+k+k^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow 4k^2 + 4k - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow (2k-1)(2k+3) = 0\end{aligned}$$

ここで、 $\angle AOB$  は鋭角であるから、 $k > 0$  であることを考慮すると、

$$\begin{aligned}k &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \left| \vec{a} \right| \left| \vec{b} \right| \cos \angle AOB &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \cos \angle AOB &= \frac{1}{2} \\ \therefore \angle AOB &= 60^\circ\end{aligned}$$

したがって、

$$OA = OB = 1, \angle AOB = 60^\circ$$

であるから、 $\triangle OAB$  は正三角形となる。

(証明終)

(1)

ルール a) より,

$$a_1 = p$$

が成り立つ。また、ルール b) より,

$$a_{n+1} = a_n p + (1 - a_n)(1 - p) = (2p - 1)a_n + 1 - p$$

が成り立つ。

$$(答) \begin{cases} a_1 = p \\ a_{n+1} = (2p - 1)a_n + 1 - p \end{cases}$$

(2)

$$a_{n+1} = (2p - 1)a_n + 1 - p$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p - 1)\left(a_n - \frac{1}{2}\right)$$

より、数列  $\left\{a_n - \frac{1}{2}\right\}$  は、初項  $a_1 - \frac{1}{2} = p - \frac{1}{2}$ 、公比  $2p - 1$  の等比数列であるから、

$$a_n - \frac{1}{2} = \left(p - \frac{1}{2}\right)(2p - 1)^{n-1} = \frac{1}{2}(2p - 1)^n$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2}(2p - 1)^n + \frac{1}{2}$$

となる。

$$(答) a_n = \frac{1}{2}(2p - 1)^n + \frac{1}{2}$$

(3)

 $p = \frac{3}{4}$  であるから、

$$a_n = \frac{1}{2}\left(2 \cdot \frac{3}{4} - 1\right)^n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}$$

である。ルール c) より、

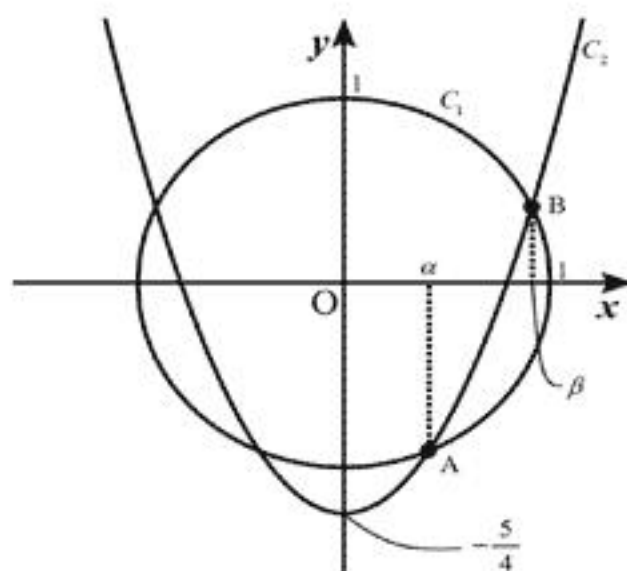
$$\begin{aligned} E_k &= a_k \cdot 2^k + (1 - a_k) \cdot 1 \\ &= (2^k - 1) \cdot a_k + 1 \\ &= (2^k - 1)\left(\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}\right) + 1 \\ &= 1 + 2^{k-1} - \frac{1}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n E_k &= \sum_{k=1}^n \left(1 + 2^{k-1} - \frac{1}{2^{k+1}}\right) \\ &= n + \frac{2^n - 1}{2 - 1} - \frac{\frac{1}{4}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2^n + \frac{1}{2^{n+1}} + n - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \sum_{k=1}^n E_k = 2^n + \frac{1}{2^{n+1}} + n - \frac{3}{2}$$



(1)

$x^2 + y^2 = 1$  に  $y = kx^2 - \frac{5}{4}$  を代入すると、

$$\begin{aligned} x^2 + \left(kx^2 - \frac{5}{4}\right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow k^2 x^4 + \left(-\frac{5}{2}k + 1\right)x^2 + \frac{9}{16} &= 0 \end{aligned}$$

である。これを  $x^2$  に関する 2 次方程式とみると、その解は、

$$x^2 = \alpha^2, \beta^2$$

である。したがって、解と係数の関係より、

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= -\frac{-\frac{5}{2}k + 1}{k^2} = \frac{5k - 2}{2k^2} \\ \alpha^2 \beta^2 &= \frac{\frac{9}{16}}{k^2} = \frac{9}{16k^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \frac{5k - 2}{2k^2} \\ \alpha^2 \beta^2 = \frac{9}{16k^2} \end{cases}$$

(2)

$\alpha^2 \beta^2 = \frac{9}{16k^2}$  と  $\alpha, \beta, k$  が正であることから、

$$\alpha\beta = \frac{3}{4k}$$

である。いま、 $A\left(\alpha, k\alpha^2 - \frac{5}{4}\right), B\left(\beta, k\beta^2 - \frac{5}{4}\right)$  であるから、

$$\begin{aligned} AB^2 &= (\alpha - \beta)^2 + \left\{\left(k\alpha^2 - \frac{5}{4}\right) - \left(k\beta^2 - \frac{5}{4}\right)\right\}^2 \\ &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta + k^2(\alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2) \\ &= (\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\beta + k^2\left\{(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2\right\} \\ &= \frac{5k - 2}{2k^2} - 2 \cdot \frac{3}{4k} + k^2\left\{\left(\frac{5k - 2}{2k^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{9}{16k^2}\right\} \\ &= \frac{10k - 4 - 6k + (5k - 2)^2 - 9k^2}{4k^2} \\ &= \frac{16k^2 - 16k}{4k^2} \\ &= \frac{4(k - 1)}{k} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$AB = 2\sqrt{\frac{k - 1}{k}}$$

となる。

$$(答) AB = 2\sqrt{\frac{k - 1}{k}}$$

(3)

$OA = OB = 1$  であるから、 $\triangle OAB$  において余弦定理より、

$$\begin{aligned} AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 150^\circ \\ \Leftrightarrow \frac{4(k - 1)}{k} &= 1 + 1 - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \Leftrightarrow 4k - 4 &= k(2 + \sqrt{3}) \\ \Leftrightarrow (2 - \sqrt{3})k &= 4 \\ \therefore k &= \frac{4}{2 - \sqrt{3}} = 8 + 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) k = 8 + 4\sqrt{3}$$

(1)

曲線  $C$  について,

$$y' = \frac{1}{x}$$

であるから,  $C$  上の点  $(p, \log p - k)$  における接線は,

$$y = \frac{1}{p}(x - p) + \log p - k$$

$$\therefore y = \frac{1}{p}x + \log p - k - 1$$

となる。この接線が原点を通るとき,

$$0 = \log p - k - 1$$

$$\therefore p = e^{k+1}$$

であるから,  $l_1$  の方程式は,

$$y = \frac{1}{e^{k+1}}x$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{1}{e^{k+1}}x$$

(2)

$l_1$  と  $l_2$  は直交するから,  $l_2$  の傾きは  $-e^{k+1}$  である。また, 点  $P$  の座標は  $(e^{k+1}, 1)$  であるから,  $l_2$  の方程式は,

$$y = -e^{k+1}(x - e^{k+1}) + 1$$

$$\therefore y = -e^{k+1}x + e^{2(k+1)} + 1$$

である。 $l_2$  と  $x$  軸の交点の  $x$  座標が  $\alpha$  なので,

$$0 = -e^{k+1}\alpha + e^{2(k+1)} + 1$$

$$\therefore \alpha = e^{k+1} + \frac{1}{e^{k+1}}$$

となる。また, 相加・相乗平均の関係より,

$$\alpha = e^{k+1} + \frac{1}{e^{k+1}} \geq 2\sqrt{e^{k+1} \cdot \frac{1}{e^{k+1}}} = 2$$

である。等号成立は,

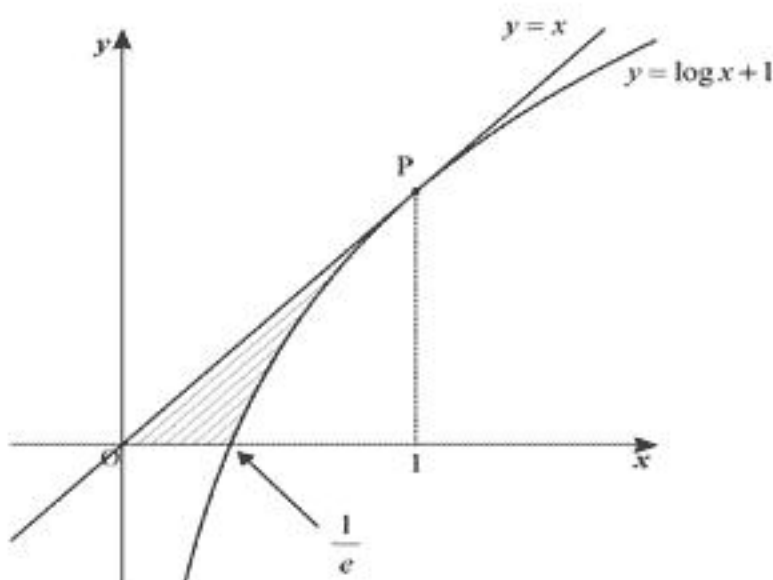
$$e^{k+1} = \frac{1}{e^{k+1}}$$

$$\therefore k = -1$$

のときである。

$$(\text{答}) \quad \alpha = e^{k+1} + \frac{1}{e^{k+1}}, \text{ 最小値 } 2 \text{ (} k = -1 \text{ のとき)}$$

(3)



$k = -1$  のとき

$$C: y = \log x + 1$$

$$l_1: y = x$$

$$P(1, 1)$$

であるから, 求める面積は,

$$\int_0^1 x \, dx - \int_{\frac{1}{e}}^1 (\log x + 1) \, dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 - \left[ x \log x \right]_{\frac{1}{e}}^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{e} \log \frac{1}{e}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$$