

1

(1)

全事象の起こる確率は1であるから、

$$4x+2y=1 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。また、期待値が $\frac{15}{4}$ であるから、

$$\begin{aligned} x \cdot 1 + y \cdot 2 + x \cdot 3 + x \cdot 4 + x \cdot 5 + y \cdot 6 &= \frac{15}{4} \\ \Leftrightarrow 13x + 8y &= \frac{15}{4} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①、②を連立して解くと、

$$(x, y) = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{3} \right)$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad (x, y) = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{3} \right)$$

(2)

このさいころを1回投げるとき、(1)より6の目が出る確率は $\frac{1}{3}$ であるから、6以外の目が出る確率は、

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

である。このさいころを5回投げるとき、6の目が3回、4回、5回出る確率はそれぞれ

$$\begin{aligned} {}_5C_3 \left(\frac{1}{3} \right)^3 \left(\frac{2}{3} \right)^2 &= 10 \cdot \frac{4}{3^5} \\ {}_5C_4 \left(\frac{1}{3} \right)^4 \cdot \frac{2}{3} &= 5 \cdot \frac{2}{3^5} \\ {}_5C_5 \left(\frac{1}{3} \right)^5 &= \frac{1}{3^5} \end{aligned}$$

である。よって、このさいころを5回投げるとき、3回以上6の目が出る確率は、

$$\frac{40}{3^5} + \frac{10}{3^5} + \frac{1}{3^5} = \frac{51}{3^5} = \frac{17}{81}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad \frac{17}{81}$$

(3)

2つのさいころの出た目の組を (a, b) とする。最小値が1となるのは

$$\begin{aligned} 1 &= a = b \\ 1 &= a < b \\ 1 &= b < a \end{aligned}$$

のいずれかが成り立つときであり、それらが実現される確率はそれぞれ

$$x^2, x(3x+2y), x(3x+2y)$$

である。これと同様に考えていくことで出る目の最小値の期待値を求めると

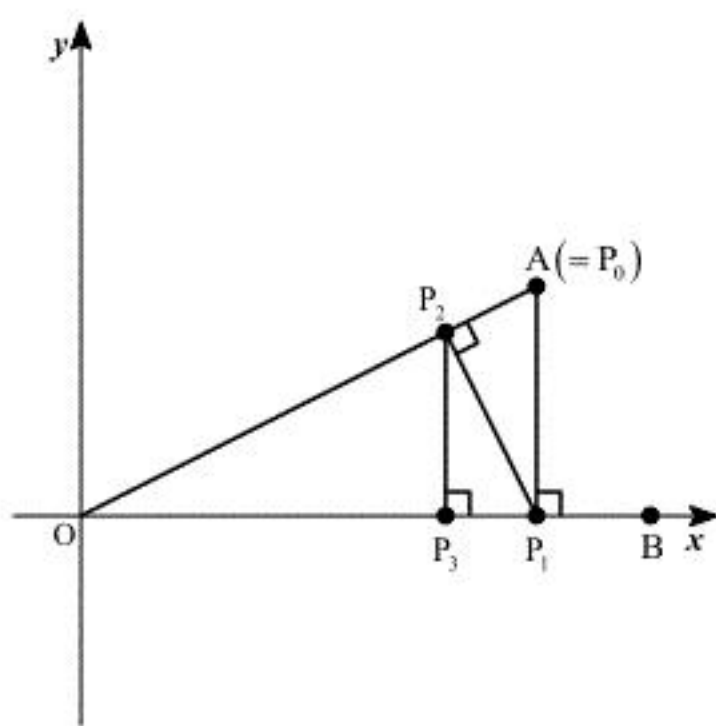
$$\begin{aligned} &\{x^2 + 2x(3x+2y)\} \cdot 1 + \{y^2 + 2y(3x+y)\} \cdot 2 + \{x^2 + 2x(2x+y)\} \cdot 3 \\ &\quad + \{x^2 + 2x(x+y)\} \cdot 4 + (x^2 + 2xy) \cdot 5 + y^2 \cdot 6 \\ &= 39x^2 + 12y^2 + 40xy \\ &= 39 \cdot \left(\frac{1}{12} \right)^2 + 12 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^2 + 40 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{391}{144} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{391}{144}$$

2

(1)



上図より、

$$P_1(4, 0)$$

$$l_1 = P_0P_1 = 2$$

である。また、

$$\angle OP_{n+1}P_n = \angle OP_{n+2}P_{n+1} = \frac{\pi}{2}$$

であり、

$$\angle O \text{ 共通}$$

であるから、

$$\triangle OP_nP_{n+1} \sim \triangle OP_{n+1}P_{n+2}$$

とわかる。したがって、

$$OP_n : OP_{n+1} = OP_{n+1} : OP_{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OP_{n+1}}{OP_n} = \frac{OP_{n+2}}{OP_{n+1}}$$

となるので、

$$\frac{OP_{n+1}}{OP_n} = \frac{OP_n}{OP_{n-1}} = \dots = \frac{OP_1}{OP_0}$$

である。

$$OP_0 = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

$$OP_1 = 4$$

であるから、

$$\frac{OP_{n+1}}{OP_n} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \dots \textcircled{1}$$

と求まる。また、同様に

$$P_nP_{n+1} : P_{n+1}P_{n+2} = OP_n : OP_{n+1}$$

であるから、

$$\Leftrightarrow P_{n+1}P_{n+2} = \frac{OP_{n+1}}{OP_n} P_nP_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow l_{n+2} = \frac{2}{\sqrt{5}} l_{n+1}$$

$$\therefore l_n = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^{n-1} \cdot l_1 = 2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^{n-1}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad l_n = 2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^{n-1}$$

(2)

$$l_1 + l_2 + \dots + l_n = \sum_{k=1}^n 2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^{k-1}$$

$$= 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^n}{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}$$

であるから、

$$l_1 + l_2 + \dots + l_n > OA + OB$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^n}{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}} > 2\sqrt{5} + 5$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^n < \frac{1}{2}$$

と変形できる。両辺常用対数をとると、

$$n \log_{10} \frac{2}{\sqrt{5}} < \log_{10} \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow n \log_{10} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}} < -\log_{10} 2$$

$$\Leftrightarrow n \left(\frac{3}{2} \log_{10} 2 - \frac{1}{2} \right) < -\log_{10} 2$$

$$\Leftrightarrow -0.0485n < -0.3010$$

$$\therefore n > 6.206 \dots$$

であるから、条件を満たす最小の n の値は

$$n = 7$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad n = 7$$

(3)

(1)より、

$$OP_{n+2} = \frac{2}{\sqrt{5}} OP_{n+1}$$

$$= \frac{4}{5} OP_n$$

であるから、

$$OP_{2n} = \left(\frac{4}{5} \right)^n OP_0$$

$$OP_{2n-1} = \left(\frac{4}{5} \right)^{n-1} OP_1$$

と表せる。 P_{2n} は OP_0 上、 P_{2n-1} は OP_1 上に存在するので、

$$P_{2n} \left(4 \left(\frac{4}{5} \right)^n, 2 \left(\frac{4}{5} \right)^n \right)$$

$$P_{2n-1} \left(4 \left(\frac{4}{5} \right)^{n-1}, 0 \right)$$

である。したがって、 $M_n(x_n, y_n)$ とすると、 M_n は $P_{2n-1}P_{2n}$ の中点であるから、

$$x_n = \frac{1}{2} \left\{ 4 \left(\frac{4}{5} \right)^n + 4 \left(\frac{4}{5} \right)^{n-1} \right\}$$

$$= \frac{18}{5} \left(\frac{4}{5} \right)^{n-1}$$

$$y_n = 2 \left(\frac{4}{5} \right)^n \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{4}{5} \right)^n = \frac{4}{5} \left(\frac{4}{5} \right)^{n-1}$$

と求まる。よって、

$$y_n = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{18} x_n = \frac{2}{9} x_n$$

となるので、 M_n はすべて $y = \frac{2}{9}x$ 上に存在する。

(証明終)

$$(\text{答}) \quad y = \frac{2}{9}x$$

3

(1)

点 C は AB を 2:1 に内分した点で、点 D は AB を 2:1 に外分した点であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \frac{1 \cdot \overrightarrow{a} + 2 \cdot \overrightarrow{b}}{2+1} = \frac{1}{3} \overrightarrow{a} + \frac{2}{3} \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{OD} &= \frac{-1 \cdot \overrightarrow{a} + 2 \overrightarrow{b}}{2-1} = -\overrightarrow{a} + 2 \overrightarrow{b}\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} &= \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{a} + \frac{2}{3} \overrightarrow{b} \right) \cdot \left(-\overrightarrow{a} + 2 \overrightarrow{b} \right) \\ &= -\frac{1}{3} |\overrightarrow{a}|^2 + \frac{4}{3} |\overrightarrow{b}|^2 \\ &= -\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{4}{3} \cdot 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = 1$

(2)

$$\cos \angle AOB = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| |\overrightarrow{b}|} = k$$

であるから、 $0 < \angle AOB < \pi$ より、

$$-1 < k < 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

と分かる。(1)より、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OC}|^2 &= \frac{1}{9} |\overrightarrow{a}|^2 + \frac{4}{9} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \frac{4}{9} |\overrightarrow{b}|^2 \\ &= \frac{5}{9} + \frac{4}{9} k \\ |\overrightarrow{OD}|^2 &= |\overrightarrow{a}|^2 - 4 \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + 4 |\overrightarrow{b}|^2 \\ &= 5 - 4k\end{aligned}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ 、 $|\overrightarrow{OC}| > 0, |\overrightarrow{OD}| > 0$ より、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OC}| &= \sqrt{\frac{5}{9} + \frac{4}{9} k} \\ |\overrightarrow{OD}| &= \sqrt{5 - 4k}\end{aligned}$$

であるから、 $\angle AOB = \angle COD$ となるとき

$$\begin{aligned}\cos \angle AOB &= \cos \angle COD \\ \Leftrightarrow k &= \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}}{|\overrightarrow{OC}| |\overrightarrow{OD}|} \\ \Leftrightarrow k &= \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{9} + \frac{4}{9} k} \sqrt{5 - 4k}} \\ \Leftrightarrow k &= \frac{3}{\sqrt{25 - 16k^2}} \\ \Leftrightarrow k \sqrt{25 - 16k^2} &= 3 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

が成り立つ。 $\sqrt{25 - 16k^2} > 0$ であるから、上式より、

$$k > 0$$

であることが分かる。したがって、 $\textcircled{1}$ より、

$$0 < k < 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

と分かる。また、 $\textcircled{2}$ の両辺を二乗して、

$$\begin{aligned}k^2 (25 - 16k^2) &= 9 \\ \Leftrightarrow 16k^4 - 25k^2 + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (k+1)(k-1)(4k+3)(4k-3) &= 0 \\ \therefore k &= \pm 1, \pm \frac{3}{4}\end{aligned}$$

と求まるが、 $\textcircled{3}$ より、

$$k_0 = \frac{3}{4}$$

である。

(答) $k_0 = \frac{3}{4}$

(3)

$\angle APD = 90^\circ$ のとき、点 P は直径を AD とする円の円周上に存在する。AD の中点は点 B であ

るから、点 P は中心 B、半径 $|\overrightarrow{AB}|$ の円の円周上に存在する。したがって、

$$|\overrightarrow{BP}| = |\overrightarrow{AB}|$$

とわかる。両辺 2 乗すると、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BP}|^2 &= |\overrightarrow{AB}|^2 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{b}|^2 - 2 \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{OP} + |\overrightarrow{OP}|^2 &= |\overrightarrow{a}|^2 - 2 \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|^2 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{OP} &= k\end{aligned}$$

と求まる ($|\overrightarrow{OP}| = 1$ を用いた)。ここで、実数 s, t を用いて $\overrightarrow{OP} = s \overrightarrow{a} + t \overrightarrow{b}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{b} \cdot (s \overrightarrow{a} + t \overrightarrow{b}) &= k \\ \Leftrightarrow sk + t &= k \\ \therefore t &= (1-s)k \quad \dots \textcircled{4}\end{aligned}$$

と表せる。また、 $|\overrightarrow{OP}| = 1$ であるから、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP}|^2 &= s^2 |\overrightarrow{a}|^2 + 2st \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + t^2 |\overrightarrow{b}|^2 \\ \Leftrightarrow s^2 + 2stk + t^2 &= 1\end{aligned}$$

であるので、上式に $\textcircled{4}$ を代入して、

$$\begin{aligned}s^2 + 2s(1-s)k^2 + (1-s)^2 k^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (1-k^2)s^2 + k^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (1-k^2)(s^2 - 1) &= 0 \\ \therefore s &= \pm 1\end{aligned}$$

と求まる。 $s = 1$ のとき、 $\textcircled{4}$ より、

$$t = 0$$

となり、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{a}$$

と一致するので不適である。 $s = -1$ のとき、

$$t = 2k$$

であるので、 $\angle APD = 90^\circ$ のとき、 $|\overrightarrow{OP}| = 1$ を満たす点 P に対して、 $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, k$ を用いて表すと、

$$\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{a} + 2k \overrightarrow{b}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{a} + 2k \overrightarrow{b}$

4

(1)

$$f(x) = (x^2 - 4x + 1)e^{-x} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x - 4)e^{-x} + (x^2 - 4x + 1)(-e^{-x}) \\ &= (-x^2 + 6x - 5)e^{-x} \\ &= -(x - 1)(x - 5)e^{-x} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1, 5 \end{aligned}$$

となるので、 $f(x)$ の増減表は下記のとおりである。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$$f(1) = -\frac{2}{e}, f(5) = \frac{6}{e^5}$$

であるから、 $f(x)$ は

$$x=1 \text{ のとき、極小値 } -\frac{2}{e},$$

$$x=5 \text{ のとき、極大値 } \frac{6}{e^5}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{極小値: } -\frac{2}{e} \quad (x=1 \text{ のとき}), \text{ 極大値: } \frac{6}{e^5} \quad (x=5 \text{ のとき})$$

(2)

$$g'(x) = f(x)$$

であるから、 $y = g(x)$ の $(3, g(3))$ における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= f(3)(x - 3) + g(3) \\ &= -\frac{2}{e^3}(x - 3) + g(3) \end{aligned}$$

と表せる。これが $(2, 0)$ を通るから、

$$0 = -\frac{2}{e^3}(2 - 3) + g(3)$$

$$\therefore g(3) = -\frac{2}{e^3} \quad \cdots \textcircled{1}$$

と求まる。また、

$$\begin{aligned} g(x) &= \int f(x) dx \\ &= -(x^2 - 4x + 1)e^{-x} + \int (2x - 4)e^{-x} dx \\ &= -(x^2 - 4x + 1)e^{-x} - (2x - 4)e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx \\ &= -(x^2 - 2x - 3)e^{-x} - 2e^{-x} + C \\ &= (-x^2 + 2x + 1)e^{-x} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

と表せるので、 $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned} g(3) &= -\frac{2}{e^3} \\ \Leftrightarrow (-9 + 6 + 1)e^{-3} + C &= -\frac{2}{e^3} \\ \Leftrightarrow -\frac{2}{e^3} + C &= -\frac{2}{e^3} \\ \therefore C &= 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$g(x) = (-x^2 + 2x + 1)e^{-x}$$

である。

$$(\text{答}) \quad g(x) = (-x^2 + 2x + 1)e^{-x}$$

(3)

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} (x^2 - 4x + 1)e^{-x} &= (-x^2 + 2x + 1)e^{-x} \\ \Leftrightarrow (2x^2 - 6x)e^{-x} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x(x - 3)e^{-x} &= 0 \\ \therefore x &= 0, 3 \end{aligned}$$

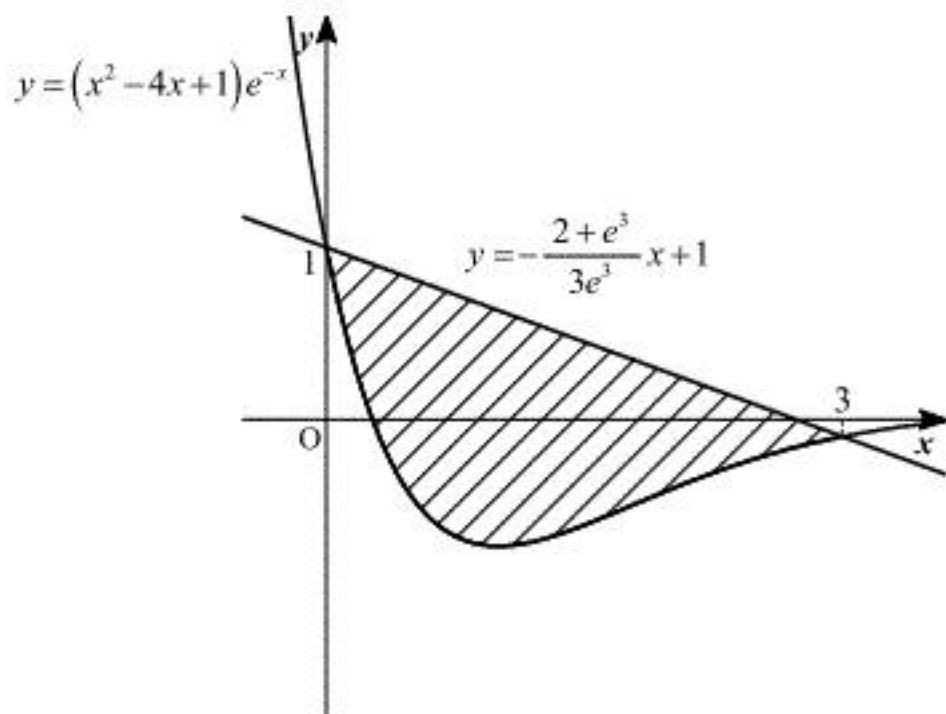
であるから、 $P(x_1, x_2), Q(x_2, y_2)$ とおくとき、 $x_1 < x_2$ とすると、

$$P(0, 1), Q\left(3, -\frac{2}{e^3}\right)$$

である。したがって、PQを通る直線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{-\frac{2}{e^3} - 1}{3 - 0}x + 1 \\ &= -\frac{2 + e^3}{3e^3}x + 1 \end{aligned}$$

したがって、(1)の増減表とあわせて、求める面積は下図の斜線部である。



求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \left\{ \left(-\frac{2 + e^3}{3e^3}x + 1 \right) - f(x) \right\} dx \\ &= \left[-\frac{2 + e^3}{6e^3}x^2 + x \right]_0^3 - \int_0^3 f(x) dx \\ &= \left(-\frac{6 + 3e^3}{2e^3} + 3 \right) - [g(x)]_0^3 \\ &= \left(-\frac{3}{e^3} - \frac{3}{2} + 3 \right) - \left(-\frac{2}{e^3} - 1 \right) \\ &= \frac{5}{2} - \frac{1}{e^3} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{2} - \frac{1}{e^3}$$

