

[I]

f により (x, y) が (X, Y) に移ったとする。このときこれらの中点は $y = kx$ 上にあるので

$$\begin{aligned}\frac{y+Y}{2} &= k \cdot \frac{x+X}{2} \\ \Leftrightarrow y+Y &= k(x+X) \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

が成り立つ。

[1] $k \neq 0$ のとき,

(x, y) と (X, Y) を結んだ直線は $y = kx$ と直交するので

$$\begin{aligned}\frac{y-Y}{x-X} &= -\frac{1}{k} \\ \Leftrightarrow y-Y &= -\frac{1}{k}(x-X) \quad \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。①+②より

$$\begin{aligned}2y &= k(x+X) - \frac{1}{k}(x-X) \\ \Leftrightarrow \left(k + \frac{1}{k}\right)X &= \left(\frac{1}{k} - k\right)x + 2y \\ \Leftrightarrow X &= \frac{1-k^2}{1+k^2}x + \frac{2k}{1+k^2}y\end{aligned}$$

となる。これを①に代入することにより

$$\begin{aligned}y+Y &= k\left(x + \frac{1-k^2}{1+k^2}x + \frac{2k}{1+k^2}y\right) \\ \Leftrightarrow Y &= \frac{2k}{1+k^2}x + \frac{k^2-1}{1+k^2}y\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-k^2}{1+k^2} & \frac{2k}{1+k^2} \\ \frac{2k}{1+k^2} & \frac{k^2-1}{1+k^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となるので、このとき f を表す行列は $\begin{pmatrix} \frac{1-k^2}{1+k^2} & \frac{2k}{1+k^2} \\ \frac{2k}{1+k^2} & \frac{k^2-1}{1+k^2} \end{pmatrix}$ となる。

[2] $k = 0$ のとき,

①より,

$$\begin{aligned}y+Y &= 0 \\ \therefore Y &= -y\end{aligned}$$

であり、 (x, y) と (X, Y) を結んだ直線は $y = 0$ と直交するので

$$x = X$$

となる。したがって,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となるので、このとき f を表す行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる。

[1], [2]より、 f を表す行列は $\begin{pmatrix} \frac{1-k^2}{1+k^2} & \frac{2k}{1+k^2} \\ \frac{2k}{1+k^2} & \frac{k^2-1}{1+k^2} \end{pmatrix}$ となる。

次に g について考える。 $\triangle OPQ$ は $OQ \perp PQ$ の直角三角形なので $OQ = OP \cos \frac{\pi}{4}$ が成り立つ。

したがって P の座標を (p, q) とおくと Q の座標は

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \cdot \cos \frac{\pi}{4} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

となる。したがって g を表す行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ となる。以上より $g \circ f$ を表す行列 A を求め

ると

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-k^2}{1+k^2} & \frac{2k}{1+k^2} \\ \frac{2k}{1+k^2} & \frac{k^2-1}{1+k^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{1-k^2}{1+k^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2k}{1+k^2} & \frac{1}{2} \cdot \frac{2k}{1+k^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2-1}{1+k^2} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1-k^2}{1+k^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2k}{1+k^2} & \frac{1}{2} \cdot \frac{2k}{1+k^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2-1}{1+k^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1-2k-k^2}{2(1+k^2)} & \frac{1+2k-k^2}{2(1+k^2)} \\ \frac{1+2k-k^2}{2(1+k^2)} & \frac{-1+2k+k^2}{2(1+k^2)} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned}A^{-1} &= \frac{1}{\frac{1-2k-k^2}{2(1+k^2)} \cdot \frac{-1+2k+k^2}{2(1+k^2)} - \frac{1+2k-k^2}{2(1+k^2)} \cdot \frac{1+2k-k^2}{2(1+k^2)}} \begin{pmatrix} \frac{-1+2k+k^2}{2(1+k^2)} & -\frac{1+2k-k^2}{2(1+k^2)} \\ -\frac{1+2k-k^2}{2(1+k^2)} & \frac{1-2k-k^2}{2(1+k^2)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{4(k^2+1)^2}{-2k^4-4k^2-2} \begin{pmatrix} \frac{-1+2k+k^2}{2(1+k^2)} & -\frac{1+2k-k^2}{2(1+k^2)} \\ -\frac{1+2k-k^2}{2(1+k^2)} & \frac{1-2k-k^2}{2(1+k^2)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{4(k^2+1)^2}{-2(k^2+1)^2} \begin{pmatrix} \frac{-1+2k+k^2}{2(1+k^2)} & -\frac{1+2k-k^2}{2(1+k^2)} \\ -\frac{1+2k-k^2}{2(1+k^2)} & \frac{1-2k-k^2}{2(1+k^2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1-2k-k^2}{1+k^2} & \frac{1+2k-k^2}{1+k^2} \\ \frac{1+2k-k^2}{1+k^2} & \frac{-1+2k+k^2}{1+k^2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1-2k-k^2}{2(1+k^2)} & \frac{1+2k-k^2}{2(1+k^2)} \\ \frac{1+2k-k^2}{2(1+k^2)} & \frac{-1+2k+k^2}{2(1+k^2)} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-2k-k^2}{1+k^2} & \frac{1+2k-k^2}{1+k^2} \\ \frac{1+2k-k^2}{1+k^2} & \frac{-1+2k+k^2}{1+k^2} \end{pmatrix}$$

[II]

ハミルトン・ケーリーの定理から

$$\begin{aligned}D(M) &= 0 \\ \Leftrightarrow M^2 - T(M)M &= O \\ \Leftrightarrow M^2 &= T(M)M \\ \Rightarrow M^n &= \{T(M)\}^{n-1} M \\ \Rightarrow T(M^n) &= T\left[\{T(M)\}^{n-1} M\right] \\ &= T\left\{(a+d)^{n-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right\} \\ &= a(a+d)^{n-1} + d(a+d)^{n-1} \\ &= (a+d)^n \\ &= \{T(M)\}^n\end{aligned}$$

となる。また,

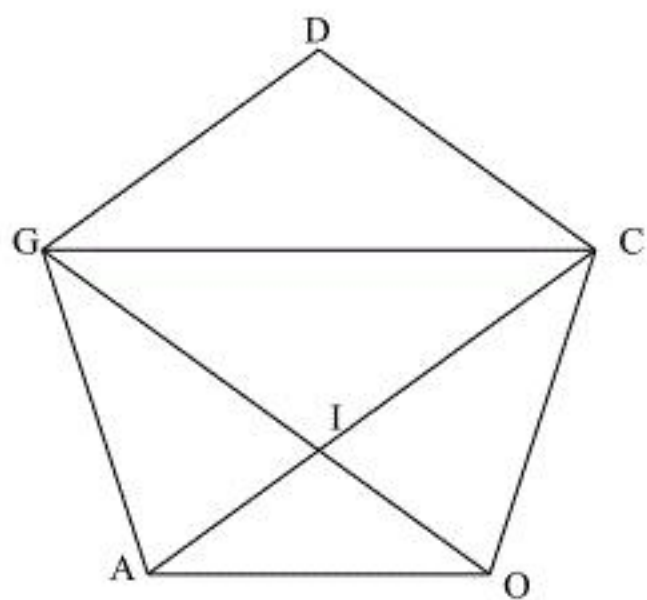
$$\begin{aligned}T(M^n) &= \{T(M)\}^n \\ \Rightarrow T(M^2) &= (a+d)^2 \\ \Leftrightarrow T\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2\right] &= (a+d)^2 \\ \Leftrightarrow a^2 + 2bc + d^2 &= a^2 + 2ad + d^2 \\ \Leftrightarrow ad - bc &= 0 \\ \Leftrightarrow D(M) &= 0\end{aligned}$$

となる。以上より題意は示せた。

(証明終)

2

(1)



上図のように一辺が1の正五角形AOC DGとし、IをACとOGの交点として定める。対角線の長さを x とおく。四角形DGICはひし形になるのでIC=1である。また $\triangle IGC \sim \triangle IAO$ より

$$\begin{aligned} x:1 &= 1:x-1 \\ \Leftrightarrow x^2-x &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2-x-1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

となる。したがって対角線の長さは $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。次に $\angle AOB = \theta$ として $\triangle OAB$ に余弦定理を用いることにより

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1+1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} \\ &= \frac{1-\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

となる。したがって $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ より

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \cdot 1 \cos \theta \\ &= \frac{1-\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) 対角線の長さ： $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$

(2)

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \overrightarrow{OC} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{OC} \\ &= \vec{a} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{c} - \vec{c} \\ &= \vec{a} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \vec{c} \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} \\ &= \vec{b} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \overrightarrow{OC} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \overrightarrow{CD} \\ &= \vec{b} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{c} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left(\vec{a} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \vec{c} \right) \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{a} + \vec{b} + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \vec{c} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{CD} = \vec{a} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \vec{c}$, $\overrightarrow{OF} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{a} + \vec{b} + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \vec{c}$

(3)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} \\ &= \vec{a} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{c} \end{aligned}$$

より s, t を実数として $\overrightarrow{OH} = (1-s-t)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OD}$ とおくと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= (1-s-t)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OD} \\ &= (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\left(\vec{a} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{c}\right) \\ &= (1-s)\vec{a} + s\vec{b} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}t\vec{c} \end{aligned}$$

となる。ここで $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ が成り立つ。 $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$ から

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} &= \left\{ (1-s)\vec{a} + s\vec{b} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}t\vec{c} \right\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= (1-s)\vec{a} \cdot \vec{b} + s|\vec{b}|^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}t\vec{b} \cdot \vec{c} - (1-s)|\vec{a}|^2 - s\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}t\vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= \frac{-3-\sqrt{5}}{4} + \frac{3+\sqrt{5}}{2}s \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow s &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。また $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AD}$ から

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AD} &= \left\{ \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}t\vec{c} \right\} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{c} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}t|\vec{c}|^2 \right) \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}t \right) \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AD} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}t &= -\frac{1-\sqrt{5}}{4} \\ \Leftrightarrow t &= -\frac{1-\sqrt{5}}{2(1+\sqrt{5})} = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= (1-s)\vec{a} + s\vec{b} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}t\vec{c} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{4}\vec{c} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\vec{c} \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OH}|^2 &= \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right)^2 |\vec{c}|^2 + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3-\sqrt{5}}{8} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OH}| &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\vec{c}$, $|\overrightarrow{OH}| = \frac{1}{2}$

(1)

 l の方程式は

$$\begin{aligned}\frac{a \cos \theta}{a^2} x + \frac{b \sin \theta}{b^2} y &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\cos \theta}{a} x + \frac{\sin \theta}{b} y &= 1 \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\tan \theta} x + \frac{b}{\sin \theta}\end{aligned}$$

となる。これと平行で P を通る直線の方程式は $y = -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\tan \theta} x - b$ となる。この直線とだ円の

の交点を求めると

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \left(-\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\tan \theta} x - b \right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \left(\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\tan^2 \theta} x^2 + \frac{2b^2}{a \tan \theta} x + b^2 \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2 \tan^2 \theta} \right) x^2 + \frac{2}{a \tan \theta} x &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1 + \tan^2 \theta}{a^2 \tan^2 \theta} x &= -\frac{2}{a \tan \theta} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} x &= -\frac{2 \cos \theta}{a \sin \theta} \\ \Leftrightarrow x &= -2a \sin \theta \cos \theta = -a \sin 2\theta\end{aligned}$$

となる。これを $y = -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\tan \theta} x - b$ に代入すると

$$\begin{aligned}y &= -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\tan \theta} (-2a \sin \theta \cos \theta) - b \\ &= 2b \cos^2 \theta - b \\ &= b \cos 2\theta\end{aligned}$$

となる。つまり R の座標は $(-a \sin 2\theta, b \cos 2\theta)$ となる。

(答) $(-a \sin 2\theta, b \cos 2\theta)$

(2)

$\overrightarrow{PQ} = (a \cos \theta, b \sin \theta + b)$, $\overrightarrow{PR} = (-a \sin 2\theta, b \cos 2\theta + b)$ より $\triangle PQR$ の面積を S とおくと

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} |a \cos \theta (b \cos 2\theta + b) - (b \sin \theta + b)(-a \sin 2\theta)| \\ &= \frac{1}{2} |ab \cos \theta \cos 2\theta + ab \cos \theta + ab \sin \theta \sin 2\theta + ab \sin 2\theta| \\ &= \frac{1}{2} ab |\cos(\theta - 2\theta) + \cos \theta + \sin 2\theta| \\ &= \frac{1}{2} ab |2 \cos \theta + \sin 2\theta|\end{aligned}$$

となる。ここで $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\cos \theta > 0, \sin 2\theta > 0$ なので $S = \frac{1}{2} ab (2 \cos \theta + \sin 2\theta)$ となる。こ

れを θ に関して微分すると

$$\begin{aligned}S' &= \frac{1}{2} ab (-2 \sin \theta + 2 \cos 2\theta) \\ &= \frac{1}{2} ab \{-2 \sin \theta + 2(1 - 2 \sin^2 \theta)\} \\ &= ab (-2 \sin^2 \theta - \sin \theta + 1) \\ &= -ab (2 \sin^2 \theta + \sin \theta - 1) \\ &= -ab (2 \sin \theta - 1)(\sin \theta + 1)\end{aligned}$$

となる。したがって増減表を書くと以下ようになる。(ただし $0 < \sin \theta < 1$ である。)

$\sin \theta$	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
S'	$\times$	+	0	-	$\times$
S	$\times$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\times$

したがって $\sin \theta = \frac{1}{2}$, つまり $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき $\triangle PQR$ の面積は最大値

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} ab \left(2 \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2} ab \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} ab\end{aligned}$$

となる。このとき Q の座標は

$$\left(a \cos \frac{\pi}{6}, b \sin \frac{\pi}{6} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a, \frac{1}{2} b \right)$$

となる。

(答) 最大値: $\frac{3\sqrt{3}}{4} ab$, Q の座標: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} a, \frac{1}{2} b \right)$

(3)

F の座標は $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ である。したがって,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{2} a &> \sqrt{a^2 - b^2} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4} a^2 &> a^2 - b^2 \\ \Leftrightarrow a^2 &< 4b^2 \\ \Leftrightarrow a &< 2b\end{aligned}$$

より,

$a < 2b$ のとき, Q の x 座標 $> F$ の x 座標

$a = 2b$ のとき, Q の x 座標 $= F$ の x 座標

$a > 2b$ のとき, Q の x 座標 $< F$ の x 座標

となる。

(答) $a < 2b$ のとき, Q の x 座標 $> F$ の x 座標

$a = 2b$ のとき, Q の x 座標 $= F$ の x 座標

$a > 2b$ のとき, Q の x 座標 $< F$ の x 座標

(1)

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \int_0^x (1+2t)(e^{2t}+1)dt - \frac{2x^2}{2} \\
&= \int_0^x (1+2t)dt + \int_0^x (1+2t)\left(\frac{1}{2}e^{2t}\right)'dt - x^2 \\
&= \left[t+t^2\right]_0^x + \left[\frac{1}{2}(1+2t)e^{2t}\right]_0^x - \int_0^x e^{2t}dt - x^2 \\
&= x+x^2 + \frac{1}{2}(1+2x)e^{2x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[e^{2t}\right]_0^x - x^2 \\
&= x + \frac{1}{2}(1+2x)e^{2x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(e^{2x}-1) \\
&= x + xe^{2x} \\
&= x(e^{2x}+1) \\
f_2(x) &= \int_0^x (2+2t)t(e^{2t}+1)dt - \frac{2}{3}x^3 \\
&= \int_0^x (2t+2t^2)dt + \int_0^x (2t+2t^2)\left(\frac{1}{2}e^{2t}\right)'dt - \frac{2}{3}x^3 \\
&= \left[t^2+\frac{2}{3}t^3\right]_0^x + \left[(t+t^2)e^{2t}\right]_0^x - \int_0^x (1+2t)e^{2t}dt - \frac{2}{3}x^3 \\
&= x^2 + \frac{2}{3}x^3 + (x+x^2)e^{2x} - \int_0^x (1+2t)(e^{2t}+1)dt + \int_0^x (1+2t)dt - \frac{2}{3}x^3 \\
&= x^2 + (x+x^2)e^{2x} - (f_1(x)+x^2) + \left[t+t^2\right]_0^x \\
&= x^2 + (x+x^2)e^{2x} - \{x(1+e^{2x})+x^2\} + x+x^2 \\
&= x^2 + x^2e^{2x} \\
&= x^2(e^{2x}+1)
\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f_1(x)=x(e^{2x}+1), \quad f_2(x)=x^2(e^{2x}+1)$$

(2)

$f_n(x)=x^n(e^{2x}+1)$ と推測できる。これを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

(1)の結果から $f_1(x)=x(e^{2x}+1)$ なので適する。

[2] $n=k$ で成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}
f_k(x) &= x^k(e^{2x}+1) \\
f_k(x) &= \int_0^x (k+2t)t^{k-1}(e^{2t}+1)dt - \frac{2x^{k+1}}{k+1} \\
&\text{が成り立つ。このとき} \\
f_{k+1}(x) &= \int_0^x (k+1+2t)t^k(e^{2t}+1)dt - \frac{2x^{k+2}}{k+2} \\
&= \int_0^x (k+1+2t)t^kdt + \int_0^x (k+1+2t)t^k\left(\frac{1}{2}e^{2t}\right)'dt - \frac{2x^{k+2}}{k+2} \\
&= \left[t^{k+1}+\frac{2}{k+2}t^{k+2}\right]_0^x + \left[\frac{1}{2}(k+1+2t)t^ke^{2t}\right]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \{(k+1)k+2(k+1)t\}t^{k-1}e^{2t}dt - \frac{2x^{k+2}}{k+2} \\
&= x^{k+1} + \frac{2x^{k+2}}{k+2} + \frac{1}{2}(k+1+2x)x^ke^{2x} - \frac{k+1}{2}\int_0^x (k+2t)t^{k-1}e^{2t}dt - \frac{2x^{k+2}}{k+2} \\
&= x^{k+1} + \frac{1}{2}(k+1+2x)x^ke^{2x} - \frac{k+1}{2}\int_0^x (k+2t)t^{k-1}(e^{2t}+1)dt + \frac{k+1}{2}\int_0^x (k+2t)t^{k-1}dt \\
&= x^{k+1} + \frac{1}{2}(k+1+2x)x^ke^{2x} - \frac{k+1}{2}\left(f_k(x) + \frac{2x^{k+1}}{k+1}\right) + \frac{k+1}{2}\left[t^k + \frac{2}{k+1}t^{k+1}\right]_0^x \\
&= x^{k+1} + \frac{1}{2}(k+1+2x)x^ke^{2x} - \frac{k+1}{2}\left\{x^k(e^{2x}+1) + \frac{2x^{k+1}}{k+1}\right\} + \frac{k+1}{2}\left\{x^k + \frac{2}{k+1}x^{k+1}\right\} \\
&= x^{k+1} + x^{k+1}e^{2x} \\
&= x^{k+1}(e^{2x}+1)
\end{aligned}$$

となり $n=k+1$ でも成り立つことが分かる。

[1], [2]より全ての n において $f_n(x)=x^n(e^{2x}+1)$ が成り立つことが示せた。

$$(\text{答}) \quad f_n(x)=x^n(e^{2x}+1)$$

(3)

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= x^n(e^{2x}+1) \\
\Rightarrow f'_n(x) &= nx^{n-1}(e^{2x}+1) + 2x^ne^{2x} \\
\Rightarrow f'_n\left(\frac{1}{2}\right) &= n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(e+1) + 2\left(\frac{1}{2}\right)^ne \\
\Leftrightarrow f'_n\left(\frac{1}{2}\right) &= n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(e+1) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}e
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^l f'_n\left(\frac{1}{2}\right) &= (e+1)\sum_{n=1}^l n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + e\sum_{n=1}^l \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= (e+1)\sum_{n=1}^l n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + e\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^l}{1-\frac{1}{2}} \\
&= (e+1)\sum_{n=1}^l n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2e\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^l\right\}
\end{aligned}$$

となるので $\sum_{n=1}^l n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = S_l$ とおくと

$$\begin{aligned}
S_l &= 1+2\cdot\frac{1}{2}+\cdots+l\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} \\
\frac{1}{2}S_l &= \frac{1}{2}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(l-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}+l\left(\frac{1}{2}\right)^l
\end{aligned}$$

となる。上式から下式をひくことにより

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}S_l &= \sum_{n=1}^l \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - l\left(\frac{1}{2}\right)^l \\
&= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^l}{1-\frac{1}{2}} - l\left(\frac{1}{2}\right)^l \\
&= 2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^l\right\} - l\left(\frac{1}{2}\right)^l \\
\Leftrightarrow S_l &= 4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^l\right\} - 2l\left(\frac{1}{2}\right)^l
\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\sum_{n=1}^l f'_n\left(\frac{1}{2}\right) = (e+1)\left[4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^l\right\} - 2l\left(\frac{1}{2}\right)^l\right] + 2e\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^l\right\}$$

となる。ここで $l \rightarrow \infty$ とすると

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} f'_n\left(\frac{1}{2}\right) &= 4(e+1) + 2e \\
&= 6e + 4
\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f'_n\left(\frac{1}{2}\right) = 6e + 4$$