

1

(1)

$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$, $|\overrightarrow{AB}| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ より, $\angle AOB = \theta$ とおき $\triangle OAB$ に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{1^2 + 1^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} \\ &= \frac{1-\sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \cdot 1 \cos \theta \\ &= \frac{1-\sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

(2)

$CD \parallel OA$ より

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{a}$$

$OC \parallel BE$ より

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{c}$$

また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{a} + \vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE} \\ &= \vec{b} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} \\ &= \vec{b} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{c} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \overrightarrow{CG} \\ &= \vec{b} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{c} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{1+\sqrt{5}} \overrightarrow{OD} \\ &= \vec{b} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{c} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{a} + \vec{c} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{a} + \vec{b} + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \vec{c}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{CD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{a}, \quad \overrightarrow{BE} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{c}, \quad \overrightarrow{OD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{a} + \vec{c}, \quad \overrightarrow{OE} = \vec{b} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{c},$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{a} + \vec{b} + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \vec{c}$$

(3)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{a} + \vec{b} + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \vec{c} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{a} + \vec{c} \right) \\ &= \vec{b} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{a} + \vec{b} + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \vec{c} - \left(\vec{b} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{c} \right) \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{a} + \vec{c}\end{aligned}$$

であり, また $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ なので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{EF} &= \left(\vec{b} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{c} \right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{a} + \vec{c} \right) \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{a} \cdot \vec{b} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} |\vec{c}|^2 \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{3+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{4} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &= (3+\sqrt{5}) \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{4} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{-2-2\sqrt{5}}{4} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。つまり $\overrightarrow{DF}$ と $\overrightarrow{EF}$ は直交する。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{2}$$

(1)

各点の座標は $P(\cos \theta, \sin \theta), Q(\cos \theta, 0), R\left(\cos \theta, \frac{1}{3} \sin \theta\right)$ となる。したがって

$$\begin{aligned}
 f(\theta) &= \tan \angle QOR \\
 &= \frac{\frac{1}{3} \sin \theta}{\cos \theta} \\
 &= \frac{1}{3} \tan \theta \\
 g(\theta) &= \tan(\theta - \angle QOR) \\
 &= \frac{\tan \theta - \tan \angle QOR}{1 + \tan \theta \tan \angle QOR} \\
 &= \frac{\frac{2}{3} \tan \theta}{1 + \frac{1}{3} \tan^2 \theta} \\
 &= \frac{2 \tan \theta}{3 + \tan^2 \theta}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(\theta) = \frac{1}{3} \tan \theta, \quad g(\theta) = \frac{2 \tan \theta}{3 + \tan^2 \theta}$$

(2)

$\tan \theta = x$ とおく。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ から $0 < x$ となる。ここで、 $h(x) = \frac{2x}{3+x^2}$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \frac{2(3+x^2) - 2x \cdot 2x}{(3+x^2)^2} \\
 &= \frac{-2x^2 + 6}{(3+x^2)^2} \\
 &= \frac{-2(x^2 - 3)}{(3+x^2)^2}
 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $h(x)$ の増減表を書くと以下ようになる。

x	0	...	$\sqrt{3}$	...
$h'(x)$		+	0	-
$h(x)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$

増減表から、 $h(x)$ は、 $x = \sqrt{3}$ のとき最大値

$$\begin{aligned}
 h(\sqrt{3}) &= \frac{2\sqrt{3}}{3+3} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

をとる。このとき $\tan \theta = \sqrt{3}$ であり、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ から $\theta = \frac{\pi}{3}$ となるので、 $g(\theta)$ は、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ のと

き最大値 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき最大値 } \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(1)

2回目の操作終了時にコインが2枚あるためには、1回目の操作で表、2回目の操作で2枚とも裏が出るか、一回目の操作で裏、2回目の操作で表が出ればよいのでその確率は

$$p(1-p)^2 + (1-p)p = p(1-p)(2-p)$$

となる。

$$(答) \quad p(1-p)(2-p)$$

(2)

[1] コインの枚数が1枚であるとき

このようなことが起こるためには2回の操作ともコインが裏となればよいのでその確率は $(1-p)^2$ となる。

[2] コインの枚数が2枚であるとき

(1)からその確率は $p(1-p)(2-p)$ となる。

[3] コインの枚数が3枚であるとき

このようなことが起こるためには1回目の操作で表、2回目の操作で1枚が表、1枚が裏となればよいのでその確率は

$$p \cdot {}_2C_1 p(1-p) = 2p^2(1-p)$$

となる。

[4] コインの枚数が4枚のとき

2回の操作ともコインが全て表となる必要があるのでその確率は p^3 となる。

[1], [2], [3], [4]から求める期待値は

$$1 \cdot (1-p)^2 + 2p(1-p)(2-p) + 3 \cdot 2p^2(1-p) + 4p^3 = p^2 + 2p + 1$$

となる。

$$(答) \quad p^2 + 2p + 1$$

(3)

3回目の操作終了時にコインが7枚以上となるためには、2回目の操作終了時にコインが4枚入っていて、3回目の操作で3枚以上のコインが表となればよい。2回目の操作終了時にコインが4枚となる確率は(2)から p^3 となる。また3枚目の操作で3枚のコインが表となる確率は

$${}_4C_1 p^3(1-p) = 4p^3(1-p)$$

となる。また3回目の操作で4枚のコインが表となる確率は p^4 となる。したがって3回目の操作終了時にコインが7枚以上となる確率は

$$p^3 \{4p^3(1-p) + p^4\} = p^3(-3p^4 + 4p^3)$$

となる。求める確率はこの排反事象の確率なので

$$1 - p^3(-3p^4 + 4p^3) = 3p^7 - 4p^6 + 1$$

となる。

$$(答) \quad 3p^7 - 4p^6 + 1$$