

(1)

2つのさいころを1回だけ投げた時の得点の組合せは以下の表のようになる。

|   | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |
|---|---|---|---|----|----|----|
| 1 | 0 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  |
| 2 | 3 | 0 | 5 | 6  | 7  | 8  |
| 3 | 4 | 5 | 0 | 7  | 8  | 9  |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 0  | 9  | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9  | 0  | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 0  |

したがって、求める期待値は、

$$\begin{aligned}\frac{6}{36} \cdot (0+7) + \frac{2}{36} \cdot (3+4+10+11) + \frac{4}{36} \cdot (5+6+8+9) &= \frac{1}{36} \cdot (42+56+112) \\ &= \frac{210}{36} \\ &= \frac{35}{6}\end{aligned}$$

となる。

(答)  $\frac{35}{6}$

(2)

C君の現在の得点は11であり、1回さいころを振ると(1)の表のように得点加わる。ただし、2つのさいころで同じ目が出たときは、得点が0となることに注意が必要である。したがって、求める期待値は、

$$\begin{aligned}\frac{6}{36} \cdot (0+18) + \frac{2}{36} \cdot (14+15+21+22) + \frac{4}{36} \cdot (16+17+19+20) &= \frac{1}{36} \cdot (108+144+288) \\ &= \frac{540}{36} \\ &= 15\end{aligned}$$

となる。

(答) 15

(3)

(2)と同様に考えると、求める期待値は、

$$\begin{aligned}y &= \frac{6}{36} \cdot \{0+(x+7)\} + \frac{2}{36} \cdot \{(x+3)+(x+4)+(x+10)+(x+11)\} \\ &\quad + \frac{4}{36} \cdot \{(x+5)+(x+6)+(x+8)+(x+9)\} \\ &= \frac{6}{36} \cdot (x+7) + \frac{2}{36} \cdot (4x+28) + \frac{4}{36} \cdot (4x+28) \\ &= \frac{6+8+16}{36} \cdot (x+7) \\ &= \frac{5}{6}(x+7)\end{aligned}$$

となる。

(答)  $y = \frac{5}{6}(x+7)$

(4)

(3)より、

$$\begin{aligned}\frac{5}{6}(x+7) &< x \\ \therefore x &> 35\end{aligned}$$

となる。

(答)  $x > 35$

(1)

$\angle AOB, \angle BOC, \angle COA$  をそれぞれ,  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  とおく。余弦定理より,

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{4+3-7}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}} = 0 \\ \cos \theta_2 = \frac{3+7-9}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{21}} \\ \cos \theta_3 = \frac{7+4-5}{2 \cdot \sqrt{7} \cdot 2} = \frac{3}{2\sqrt{7}} \end{cases}$$

である。よって,

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos \theta_1 = 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \cos \theta_2 = \frac{1}{2} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} = \sqrt{7} \cdot 2 \cdot \cos \theta_3 = 3 \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}, \vec{c} \cdot \vec{a} = 3$$

(2)

Hは平面 $\alpha$ 上の点より,  $\vec{OH} = s\vec{a} + t\vec{b}$  とおける。このとき,

$$\vec{CH} = \vec{OH} - \vec{OC} = s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}$$

となる。ここで,  $CH \perp$  平面 $\alpha$  より,

$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{CH} &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot (s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}) &= 0 \\ \Leftrightarrow s|\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4s + 0 - 3 &= 0 \\ \therefore s &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned} \vec{OB} \cdot \vec{CH} &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{b} \cdot (s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3t - \frac{1}{2} &= 0 \\ \therefore t &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

となる。以上より,

$$\vec{OH} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \vec{OH} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$$

(3)

(2)より,

$$\vec{CH} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} - \vec{c}$$

である。よって, CHの長さは,

$$\begin{aligned} |\vec{CH}|^2 &= \frac{9}{16}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{36}|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{3}{2}\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= \frac{9}{4} + \frac{1}{12} + 7 + 0 - \frac{1}{6} - \frac{9}{2} \\ &= \frac{14}{3} \end{aligned}$$

より,

$$|\vec{CH}| = \sqrt{\frac{14}{3}}$$

となる。(1)より,  $\angle AOB = 90^\circ$  であるため, 以上より, 四面体 OABC の体積は,

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{14}{3}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{14}}{3}$$

(1)

$$5a_{n+1} - 4a_n = 1$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - 1 = \frac{4}{5}(a_n - 1)$$

となる。よって、数列  $\{a_n - 1\}$  は初項  $a_1 - 1 = -2$ 、公比  $\frac{4}{5}$  の等比数列である。したがって、

$$a_n - 1 = (-2) \left( \frac{4}{5} \right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = (-2) \left( \frac{4}{5} \right)^{n-1} + 1$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = (-2) \left( \frac{4}{5} \right)^{n-1} + 1$$

(2)

(1)より、

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left\{ (-2) \left( \frac{4}{5} \right)^{k-1} + 1 \right\}$$

$$= (-2) \sum_{k=1}^n \left( \frac{4}{5} \right)^{k-1} + n$$

$$= (-2) \cdot \frac{1 - \left( \frac{4}{5} \right)^n}{1 - \frac{4}{5}} + n$$

$$= 10 \cdot \left( \frac{4}{5} \right)^n + n - 10$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_n = 10 \cdot \left( \frac{4}{5} \right)^n + n - 10$$

(3)

(2)より、

$$S_9 = 10 \cdot \left( \frac{4}{5} \right)^9 - 1$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \log_{10} 10 \cdot \left( \frac{4}{5} \right)^9 &= 1 + 9(\log_{10} 4 - \log_{10} 5) \\ &= 1 + 9(2 \log_{10} 2 - 1 + \log_{10} 2) \\ &= 1 + 9(3 \cdot 0.3010 - 1) \\ &= 0.127 \end{aligned}$$

$$\therefore 10 \cdot \left( \frac{4}{5} \right)^9 = 10^{0.127} > 1$$

となる。したがって、

$$S_9 = 10 \cdot \left( \frac{4}{5} \right)^9 - 1 > 0$$

である。また、 $n \geq 10$  のとき、

$$S_n = 10 \cdot \left( \frac{4}{5} \right)^n + n - 10 > 0$$

となるのは明らかである。以上より、 $n \geq 9$  のとき、 $S_n > 0$  となることが示せた。

(証明終)

(1)

$R(x, y)$ とおく。このとき、 $t$ の値によって以下のように場合分けを行う。

[1]  $t=0$ のとき

直線  $PQ$  は  $O$  を通るため、 $R=O$  で、 $(x, y)=(0, 0)$  である。

[2]  $0 < t \leq \frac{\pi}{4}$  のとき、

直線  $PQ$  の傾きは、 $-\frac{\sin t}{\cos t}$  であるため、直線  $OR$  の傾きについて

$$\frac{y}{x} = \frac{\cos t}{\sin t} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、線分  $OR$  の中点  $H\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$  は直線  $PQ$  上にあるため、

$$\frac{y}{2} = -\frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{x}{2} + \sin t \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。以上、①と②より、

$$\begin{aligned} \frac{\cos t}{\sin t} \cdot x &= -\frac{\sin t}{\cos t} \cdot x + 2 \sin t \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sin t \cos t} x &= 2 \sin t \\ \therefore x &= \sin 2t \sin t, y = \sin 2t \cos t \end{aligned}$$

となる。この式において  $t=0$  とすると  $(x, y)=(0, 0)$  より、これは  $t=0$  の場合を含む。

以上[1], [2]より題意は示された。

(証明終)

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 2 \cos 2t \cos t - \sin 2t \sin t \\ &= 2 \cos t \{(1 - 2 \sin^2 t) - \sin^2 t\} \\ &= 2 \cos t (1 - 3 \sin^2 t) \end{aligned}$$

である。ここで、 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$  より、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - 3 \sin^2 t &= 0 \quad (\because \cos t > 0) \\ \Leftrightarrow \sin t &= \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\because 0 \leq \sin t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}) \end{aligned}$$

となる。 $0 < t < \frac{\pi}{4}$  かつ  $\sin t = \frac{1}{\sqrt{3}}$  を満たす実数  $t$  が唯一つ存在するため、この  $t$  を  $\alpha$  とおけば、 $y$  の増減表は次のようになる。

|                 |   |     |          |     |                 |
|-----------------|---|-----|----------|-----|-----------------|
| $t$             | 0 | ... | $\alpha$ | ... | $\frac{\pi}{4}$ |
| $\frac{dy}{dt}$ |   | +   | 0        | -   |                 |
| $y$             |   | ↗   |          | ↘   |                 |

よって、 $t=\alpha$  のとき  $y$  座標は最大となり、このとき、

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

となるため、点  $R$  の座標は、

$$\begin{aligned} x &= \sin 2\alpha \sin \alpha = 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{9} \\ y &= \sin 2\alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

である。

(答)  $\left(\frac{2\sqrt{6}}{9}, \frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$

(3)

点  $R$  の座標を  $(x_r, y_r) = (\sin 2t \sin t, \sin 2t \cos t)$  とおく。点  $R$  が  $y=x$  上にあるのは、

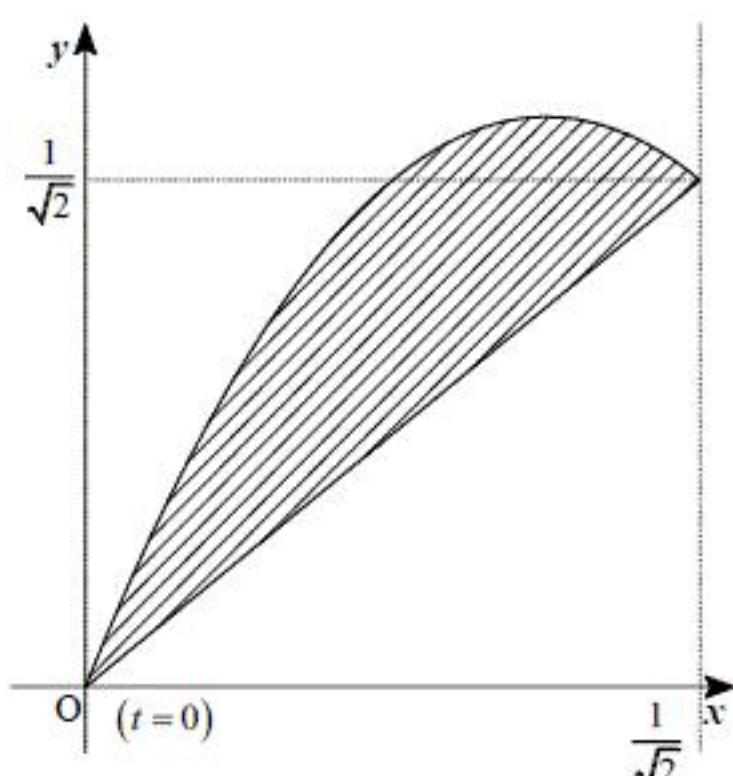
$$\begin{aligned} x_r &= y_r \\ \Leftrightarrow \sin 2t \cos t &= \sin 2t \sin t \\ \Leftrightarrow \sin 2t (\cos t - \sin t) &= 0 \\ \therefore t &= 0, \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

のときである。 $t=0$  のとき、点  $R(0, 0)$  であり、 $t=\frac{\pi}{4}$  のとき、点  $R\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  となる。

また、 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$  において、

$$\begin{aligned} y_r - x_r &= \sin 2t \cos t - \sin 2t \sin t \\ &= \sin 2t (\cos t - \sin t) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

より、点  $R$  は常に  $y \geq x$  の範囲に存在する。さらに、 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$  の範囲では  $x_r$  は  $t$  について単調増加である。以上より、求める面積は下図の斜線部分の面積である。



求める面積を  $S$  とおくと

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y_r dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t \cos t \cdot \frac{dx_r}{dt} dt - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。第1項の定積分を  $I$  とおくと

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t \cos t (2 \cos 2t \sin t + \sin 2t \cos t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 2t \cos 2t + \sin^2 2t \cos^2 t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \sin^2 2t \cos 2t + \sin^2 2t \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{3}{2} \sin^2 2t \cos 2t + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4t}{2} \right) dt \\ &= \left[ \frac{1}{4} \sin^3 2t + \frac{1}{4} t - \frac{1}{16} \sin 4t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

である。したがって

$$S = I - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{16}$$

である。

(答)  $\frac{\pi}{16}$

(1)

被積分関数は

$$0 \leq t \leq 2x \text{ のとき, } (-t^2 + 3xt) + xt = -t^2 + 3xt$$

$$t \geq 2x \text{ のとき, } (t^2 - 2xt) + xt = t^2 - xt$$

である。よって、 $0 < x \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq 2$  のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{2x} (-t^2 + 3xt) dt + \int_{2x}^2 (t^2 - xt) dt \\ &= \left[ -\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}xt^2 \right]_0^{2x} + \left[ \frac{1}{3}t^3 - \frac{x}{2}t^2 \right]_{2x}^2 \\ &= \frac{8}{3}x^3 - 2x + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad f(x) = \frac{8}{3}x^3 - 2x + \frac{8}{3}$$

(2)

 $x \geq 1 \Leftrightarrow 2x \geq 2$  のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^2 (-t^2 + 3xt) dt \\ &= \left[ -\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}xt^2 \right]_0^2 \\ &= 6x - \frac{8}{3} \end{aligned}$$

であるため、 $x \geq 1$ において $f(x)$ は単調増加する。また、 $0 < x < 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{8}{3}x^3 - 2x + \frac{8}{3} \\ \Rightarrow f'(x) &= 8x^2 - 2 = 2(2x+1)(2x-1) \end{aligned}$$

であるため、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

|         |     |     |               |     |   |     |
|---------|-----|-----|---------------|-----|---|-----|
| $x$     | (0) | ... | $\frac{1}{2}$ | ... | 1 | ... |
| $f'(x)$ |     | -   | 0             | +   |   | +   |
| $f(x)$  |     |     |               |     |   |     |

したがって、 $f(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ のとき、最小値2をとる。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{1}{2} \text{ のとき, 最小値 } 2$$

(3)

 $g(x) = f(x) - 4x$ とおくと

$$0 < x \leq 1 \text{ のとき, } g(x) = \frac{8}{3}x^3 - 6x + \frac{8}{3}$$

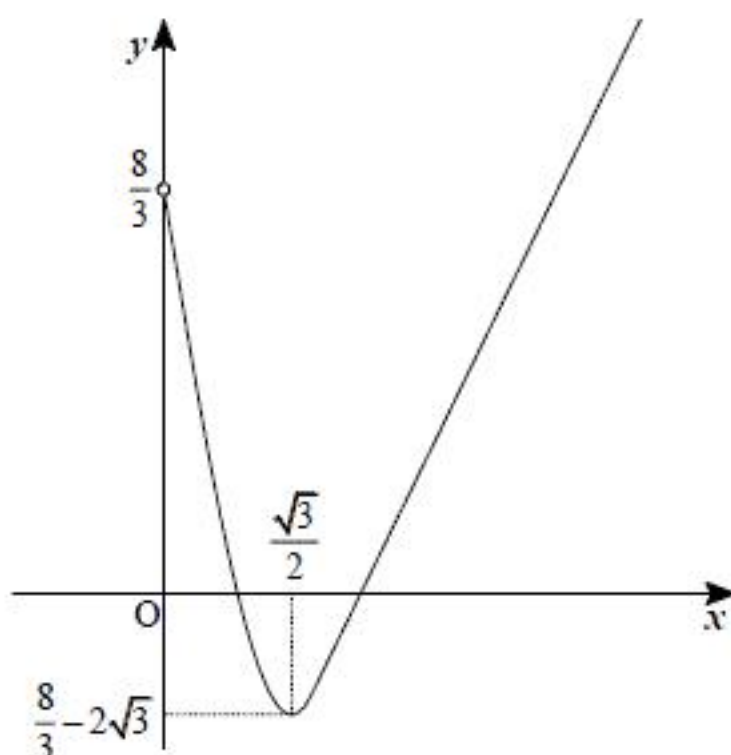
$$x \geq 1 \text{ のとき, } g(x) = 2x - \frac{8}{3}$$

となる。曲線 $y = g(x)$ と直線 $y = k$ が異なる2点で交わる条件を求めればよい。 $0 < x < 1$ のとき、

$$g'(x) = 8x^2 - 6 = 2(2x + \sqrt{3})(2x - \sqrt{3})$$

より、 $g(x)$ の増減表は次のようになる。

|         |                            |     |                           |     |   |     |
|---------|----------------------------|-----|---------------------------|-----|---|-----|
| $x$     | (0)                        | ... | $\frac{\sqrt{3}}{2}$      | ... | 1 | ... |
| $g'(x)$ |                            | -   | 0                         | +   |   | +   |
| $g(x)$  | $\left(\frac{8}{3}\right)$ |     | $\frac{8}{3} - 2\sqrt{3}$ |     |   |     |

よって、曲線 $y = g(x)$ の概形は下図のようになる。よって、求める条件は $\frac{8}{3} - 2\sqrt{3} < k < \frac{8}{3}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{8}{3} - 2\sqrt{3} < k < \frac{8}{3}$$