

I

(1)

$$\begin{aligned} |\overline{AB}|^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 \\ &= |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 \\ &= 9 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 3$$

を得る。同様にして

$$\begin{aligned} |\overline{BC}|^2 &= 12 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= 4 \\ \therefore \vec{b} \cdot \vec{c} &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overline{AC}|^2 &= 11 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= 5 \\ \therefore \vec{c} \cdot \vec{a} &= 3 \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 3, \vec{b} \cdot \vec{c} = 4, \vec{c} \cdot \vec{a} = 3$$

(2)

Hは平面 α 上の点より、 $\overline{OH} = s\vec{a} + t\vec{b}$ とおける。このとき、

$$\begin{aligned} \overline{CH} &= \overline{OH} - \overline{OC} \\ &= s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $CH \perp$ 平面 α より、

$$\begin{aligned} \overline{OA} \cdot \overline{CH} &= \vec{a} \cdot (s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}) \\ &= s|\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= 4s + 3t - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore 4s + 3t = 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

であり、

$$\begin{aligned} \overline{OB} \cdot \overline{CH} &= \vec{b} \cdot (s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}) \\ &= 3s + 5t - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore 3s + 5t = 4 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。よって、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より、 $s = \frac{3}{11}$ 、 $t = \frac{7}{11}$ を得る。以上より、

$$\overline{OH} = \frac{3}{11}\vec{a} + \frac{7}{11}\vec{b}$$

であり、

$$\begin{aligned} |\overline{OH}|^2 &= \frac{1}{11^2} |3\vec{a} + 7\vec{b}|^2 \\ &= \frac{1}{11^2} (9|\vec{a}|^2 + 42\vec{a} \cdot \vec{b} + 49|\vec{b}|^2) \\ &= \frac{407}{11^2} \end{aligned}$$

$$\therefore |\overline{OH}| = \frac{\sqrt{407}}{11}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overline{OH} = \frac{3}{11}\vec{a} + \frac{7}{11}\vec{b}, |\overline{OH}| = \frac{\sqrt{407}}{11}$$

(3)

$$CH = \sqrt{OC^2 - OH^2} = \sqrt{7 - \frac{407}{121}} = \frac{2\sqrt{110}}{11}$$

となる。また、三角形OABの面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 5 - 3^2} \\ &= \frac{\sqrt{11}}{2} \end{aligned}$$

である。以上より、四面体OABCの体積は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{11}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{110}}{11} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{10}}{3}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 5a_{n+1} - 4a_n &= 1 \\
 \Leftrightarrow a_{n+1} - 1 &= \frac{4}{5}(a_n - 1)
 \end{aligned}$$

となる。よって、数列 $\{a_n - 1\}$ は初項 $a_1 - 1 = -2$ 、公比 $\frac{4}{5}$ の等比数列である。したがって、

$$\begin{aligned}
 a_n - 1 &= -2 \left(\frac{4}{5} \right)^{n-1} \\
 \therefore a_n &= -2 \left(\frac{4}{5} \right)^{n-1} + 1
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = -2 \left(\frac{4}{5} \right)^{n-1} + 1$$

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n \left\{ -2 \left(\frac{4}{5} \right)^{k-1} + 1 \right\} \\
 &= -2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{5} \right)^{k-1} + n \\
 &= -2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{5} \right)^n}{1 - \frac{4}{5}} + n \\
 &= 10 \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^n + n - 10
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_n = 10 \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^n + n - 10$$

(3)

(2)より、 $n \geq 10$ のときは、明らかに $S_n > 0$ である。また、 $n < 5$ のとき $\frac{1}{2} < \left(\frac{4}{5} \right)^{n-1}$ 、 $n \geq 5$ のと

き $\frac{1}{2} > \left(\frac{4}{5} \right)^{n-1}$ であり、

$$\begin{aligned}
 a_n &= -2 \left(\frac{4}{5} \right)^{n-1} + 1 \\
 &= 2 \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{4}{5} \right)^{n-1} \right\}
 \end{aligned}$$

より $n < 5$ のとき $a_n < 0$ 、 $n \geq 5$ のとき $a_n > 0$ である。よって、 $n < 5$ のとき $S_n < 0$ で、 $n \geq 5$ のとき S_n は単調増加する。そこで、 $n = 9$ について調べる。

$$S_9 = 10 \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^9 - 1$$

となり、

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 10 \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^9 &= 1 + 9(\log_{10} 4 - \log_{10} 5) \\
 &= 1 + 9(2 \log_{10} 2 - 1 + \log_{10} 2) \\
 &= 1 + 9(3 \cdot 0.3010 - 1) \\
 &= 0.127
 \end{aligned}$$

$$\therefore 10 \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^9 = 10^{0.127} > 10^0 = 1$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
 S_9 &= 10 \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^9 - 1 \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

である。同様にして、 $n = 8$ について調べる。

$$S_8 = 10 \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^8 - 2$$

であり、

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 10 \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^8 &= 1 + 8(\log_{10} 4 - \log_{10} 5) \\
 &= 1 + 8(2 \log_{10} 2 - 1 + \log_{10} 2) \\
 &= 1 + 8(3 \cdot 0.3010 - 1) \\
 &= 0.224
 \end{aligned}$$

$$\therefore \log_{10} 10 \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^8 < \log_{10} 2 = 0.3010$$

$$\therefore 10 \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^8 < 2$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
 S_8 &= 10 \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^8 - 2 \\
 &< 0
 \end{aligned}$$

である。以上より、 $S_n > 0$ となる最小の n は 9 である。

$$(\text{答}) \quad n = 9$$

[1]

積分定数を C とおく。 m, n の値によって以下のように場合分けを行う。

[i] $m \neq n$ のとき

$$\begin{aligned}\int \cos mx \cos nx dx &= \frac{1}{2} \int \{ \cos(m+n)x + \cos(m-n)x \} dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{m+n} \sin(m+n)x + \frac{1}{m-n} \sin(m-n)x \right\} + C \quad (\because m-n \neq 0)\end{aligned}$$

である。

[ii] $m = n$ のとき

$$\begin{aligned}\int \cos mx \cos nx dx &= \int \cos^2 mx dx \\ &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2mx) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2m} \sin 2mx \right) + C \quad (\because m \neq 0)\end{aligned}$$

である。

以上, [i], [ii] より,

$$\int \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{m+n} \sin(m+n)x + \frac{1}{m-n} \sin(m-n)x \right\} + C & (m \neq n) \\ \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2m} \sin 2mx \right) + C & (m = n) \end{cases}$$

となる。

$$\begin{aligned}(\text{答}) \quad \int \cos mx \cos nx dx &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{m+n} \sin(m+n)x + \frac{1}{m-n} \sin(m-n)x \right\} + C & (m \neq n) \\ \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2m} \sin 2mx \right) + C & (m = n) \end{cases}\end{aligned}$$

[2](1)

直線 PQ の方程式は

$$x \sin t + y \cos t = \sin t \cos t \quad \dots \textcircled{1}$$

である。直線 OR は原点を通り、直線 PQ に垂直であるから、直線 OR の方程式は

$$x \cos t - y \sin t = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。 $R(X, Y)$ とおくと、これは②を満たすから

$$X \cos t - Y \sin t = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

である。また、線分 OR の中点 $H\left(\frac{X}{2}, \frac{Y}{2}\right)$ は直線 PQ 上にあり、①を満たすから

$$X \sin t + Y \cos t = 2 \sin t \cos t \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。③と④を連立させて解くと

$$\begin{aligned}(X, Y) &= (\sin^2 t \cos t, \sin t \cos^2 t) \\ &= (\sin 2t \sin t, \sin 2t \cos t)\end{aligned}$$

となるから、

$$R(\sin 2t \sin t, \sin 2t \cos t)$$

である。

$$(\text{答}) \quad R(\sin 2t \sin t, \sin 2t \cos t)$$

(2)

点 R の座標を

$$(x, y) = (\sin 2t \sin t, \sin 2t \cos t)$$

とおく。R の描く曲線と直線 $y = x$ の位置関係を考えると、 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \left(\Leftrightarrow 0 \leq 2t \leq \frac{\pi}{2} \right)$ におい

て $0 \leq \sin t \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos t \leq 1, \sin 2t \geq 0, \cos 2t \geq 0$ より

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2 \cos 2t \sin t + \sin 2t \cos t \\ &\geq 0\end{aligned}$$

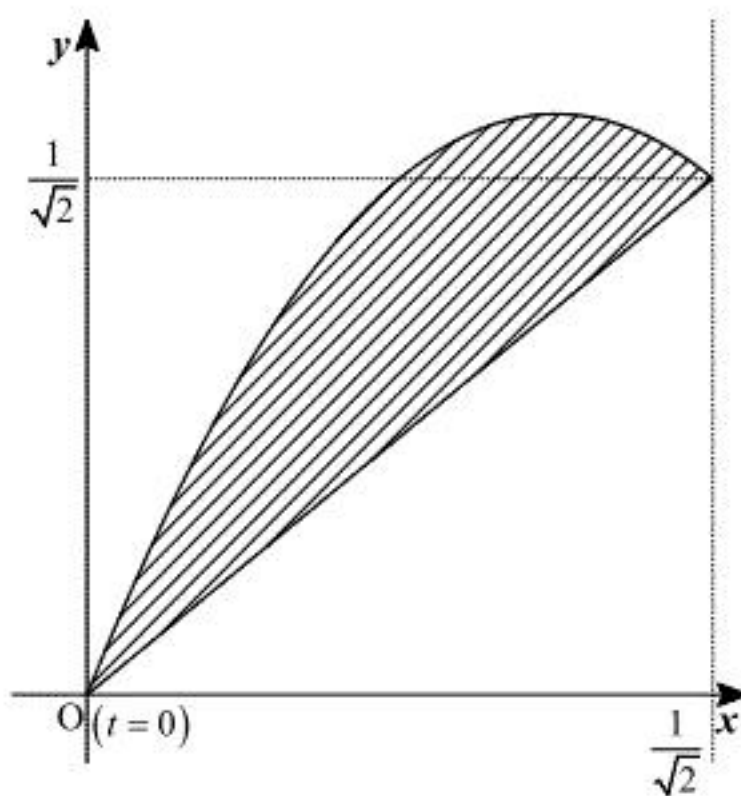
であり、

$$\begin{aligned}y - x &= \sin 2t \cos t - \sin 2t \sin t \\ &= \sin 2t (\cos t - \sin t) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

$$(\text{等号成立は } t = 0, \frac{\pi}{4} \text{ のとき})$$

となるから、R の描く曲線は直線 $y = x$ より上方にあり、共有点は $(0, 0), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ である。

よって、その概形は下図のようになり、斜線部分の面積を求めればよいこととなる。



求める面積を S とおくと

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t \cos t \cdot \frac{dx}{dt} dt - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。第 1 項の定積分を I とおくと

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t \cos t (2 \cos 2t \sin t + \sin 2t \cos t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 2t \cos 2t + \sin^2 2t \cos^2 t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin^2 2t \cos 2t + \sin^2 2t \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{2} \sin^2 2t \cos 2t + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4t}{2} \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{4} \sin^3 2t + \frac{1}{4} t - \frac{1}{16} \sin 4t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\pi}{16}\end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned}S &= I - \frac{1}{4} \\ &= \frac{\pi}{16}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{16}$$

(1)

点 $A\left(\frac{4}{\cos\theta}, 3\tan\theta\right)$ における C の接線の方程式は、

$$\begin{aligned}\frac{4}{\cos\theta} \cdot \frac{x}{16} - 3\tan\theta \cdot \frac{y}{9} &= 1 \\ \therefore y &= \frac{3}{4\sin\theta}x - \frac{3}{\tan\theta}\end{aligned}$$

となる。また、点 $B(4, 0)$ における C の接線の方程式は、

$$x = 4$$

である。よって、交点 D の x 座標は 4, y 座標は、

$$y = \frac{3}{4\sin\theta} \cdot 4 - \frac{3}{\tan\theta} = \frac{3(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$$

より、 $D\left(4, \frac{3(1-\cos\theta)}{\sin\theta}\right)$ となる。

$$(\text{答}) D\left(4, \frac{3(1-\cos\theta)}{\sin\theta}\right)$$

(2)

F の x 座標は、

$$\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

より、 $F(5, 0)$ である。ここで、

$$\begin{aligned}FB &= 5 - 4 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$DB = \frac{3(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$$

であり、 $\triangle BDF$ は $\angle BDF = 90^\circ$ の直角三角形であるため、

$$\begin{aligned}\tan\angle DFB &= \frac{DB}{FB} \\ &= \frac{3(1-\cos\theta)}{\sin\theta}\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} + 1} = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2m}{1+m^2} \\ \cos\theta &= \frac{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1 - \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{1 + \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1-m^2}{1+m^2}\end{aligned}$$

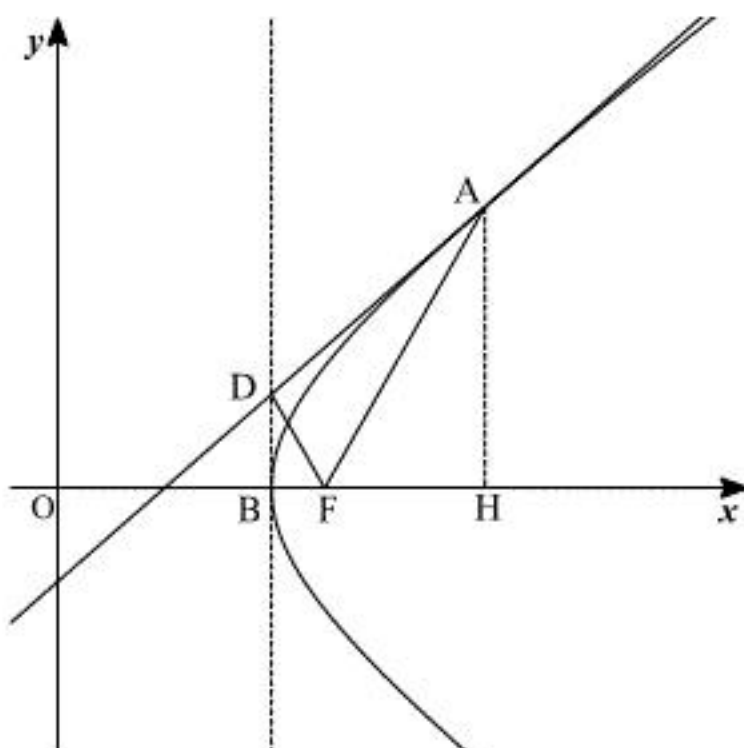
であるから、

$$\begin{aligned}\tan\angle DFB &= \frac{3(1-\cos\theta)}{\sin\theta} \\ &= 3\left(1 - \frac{1-m^2}{1+m^2}\right) \cdot \frac{1+m^2}{2m} \\ &= 3m\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \tan\angle DFB = 3m$$

(3)



点 A から x 軸に下ろした垂線の足を点 H とすると、点 $H\left(\frac{4}{\cos\theta}, 0\right)$ である。ここで、点 F の位置によって以下のように場合分けを行う。

[1] H と F が異なる点、すなわち $\frac{4}{\cos\theta} \neq 5 \Leftrightarrow \cos\theta \neq \frac{4}{5}$ のとき

H が F より右側にあるときは

$$\begin{aligned}\tan\angle AFB &= -\tan\angle AFH \\ &= -\frac{3\tan\theta}{\frac{4}{\cos\theta} - 5} \\ &= \frac{3\tan\theta}{5 - \frac{4}{\cos\theta}}\end{aligned}$$

となり、 H が F より左側にあるときは

$$\tan\angle AFB = \frac{3\tan\theta}{5 - \frac{4}{\cos\theta}}$$

となるため、いずれにしても $\tan\angle AFB = \frac{3\tan\theta}{5 - \frac{4}{\cos\theta}}$ である。

ここで、(2)より、

$$\begin{aligned}\tan\angle AFB &= \frac{3\tan\theta}{5 - \frac{4}{\cos\theta}} \\ &= \frac{3\sin\theta}{5\cos\theta - 4} \\ &= \frac{3 \cdot \frac{2m}{1+m^2}}{5 \cdot \frac{1-m^2}{1+m^2} - 4} \\ &= \frac{6m}{1-9m^2}\end{aligned}$$

である。一方、2倍角の公式より

$$\begin{aligned}\tan 2\angle DFB &= \frac{2\tan\angle DFB}{1 - \tan^2\angle DFB} \\ &= \frac{2 \cdot 3m}{1 - (3m)^2} \\ &= \frac{6m}{1-9m^2}\end{aligned}$$

である。よって、

$$\tan\angle AFB = \tan 2\angle DFB$$

となり、 $0 < \angle AFB < \pi, 0 < 2\angle DFB < \pi$ より

$$\angle AFB = 2\angle DFB$$

となる。したがって、直線 DF は $\angle AFB$ を 2 等分する。

[2] H と F が一致する、すなわち $\cos\theta = \frac{4}{5}$ のとき

このとき、 $\angle AFB = \frac{\pi}{2}$ である。また、 $\cos\theta = \frac{4}{5}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より

$$\sin\theta = \frac{3}{5}$$

であるから、

$$\tan\angle DFB = \frac{3(1-\cos\theta)}{\sin\theta} = 1$$

となり、 $0 < \angle DFB < \frac{\pi}{2}$ より

$$\angle DFB = \frac{\pi}{4}$$

である。よって

$$\angle AFB = 2\angle DFB$$

となる。したがって、直線 DF は $\angle AFB$ を 2 等分する。

以上[1], [2]より題意は示された。