

(1)

$y = g(x)$ は、点 $(\alpha, f(\alpha))$ を通り、傾きが $f'(\alpha)$ の直線である。 $f'(x) = \sin x + x \cos x$ より、その直線の方程式は

$$\begin{aligned} y - f(\alpha) &= f'(\alpha)(x - \alpha) \\ \therefore y - \alpha \sin \alpha &= (\sin \alpha + \alpha \cos \alpha)(x - \alpha) \end{aligned}$$

と表せる。よって、

$$y = (\sin \alpha + \alpha \cos \alpha)x - \alpha^2 \cos \alpha$$

となる。

$$(\text{答}) \quad g(x) = (\sin \alpha + \alpha \cos \alpha)x - \alpha^2 \cos \alpha$$

(2)

$y = g(x)$ が原点を通るとき

$$\begin{aligned} \alpha^2 \cos \alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \alpha &= 0 \quad (\because \alpha > 0) \\ \therefore \alpha &= \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

となる。 α_1 はこのような整数の最小値であるから、

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$$

となる。 $\alpha = \alpha_1$ のときの $g(x)$ が $h(x)$ であるから、

$$\begin{aligned} h(x) &= (\sin \alpha_1 + \alpha_1 \cos \alpha_1)x - \alpha_1^2 \cos \alpha_1 \\ &= \left(\sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \right)x - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \cos \frac{\pi}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2}, h(x) = x$$

(3)

$$\begin{aligned} h(x) - f(x) &= x - x \sin x \\ &= x(1 - \sin x) \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq x \leq \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ のとき、 $x \geq 0$ 、 $1 - \sin x \geq 0$ であるから、

$$h(x) - f(x) \geq 0$$

となる。よって題意は示された。

(証明終)

(4)

C を積分定数とし、部分積分を用いると

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

となる。(3)より、 $0 \leq x \leq \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ のとき $h(x) - f(x) \geq 0$ であるから、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{h(x) - f(x)\} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - x \sin x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 + x \cos x - \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^2}{8} - 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi^2}{8} - 1$$

2

(1)

△OABにおいて余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos \angle AOB &= \frac{1^2 + 1^2 - m^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} \\ &= \frac{2 - m^2}{2}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= OA \cdot OB \cdot \cos \theta \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{2 - m^2}{2} \\ &= \frac{2 - m^2}{2}\end{aligned}$$

となる。同様に、

$$\begin{aligned}\cos \angle BOC &= \cos \angle COA = \frac{2 - m^2}{2} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} &= \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{2 - m^2}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{2 - m^2}{2}$

(2)

$\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$ である。 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a}$ を用いると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{OG} \cdot (\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \cdot \left(\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} - \vec{a} \right) \\ &= \frac{1}{9} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ &= \frac{1}{9} (-2|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{a}) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。同様にして、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{BG} &= \overrightarrow{OG} \cdot (\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{9} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{CG} &= \overrightarrow{OG} \cdot (\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OC}) \\ &= \frac{1}{9} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$

(3)

(2)より $OG \perp (\text{平面 } ABC)$ となる。

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot m \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} m^2\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OG}|^2 &= \left| \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \right|^2 \\ &= \frac{1}{9} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a}) \\ &= \frac{1}{9} \{3 + 3(2 - m^2)\} \\ &= \frac{3 - m^2}{3}\end{aligned}$$

となるから、求める体積は

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \cdot \triangle ABC \cdot OG \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} m^2 \cdot \sqrt{\frac{3 - m^2}{3}} \\ &= \frac{m^2}{12} \sqrt{3 - m^2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $V = \frac{m^2}{12} \sqrt{3 - m^2}$

(4)

$m^2 = x$ とおくと、 $|\overrightarrow{OG}|^2 = \frac{3 - m^2}{3} > 0$ より

$$3 - m^2 > 0 \Leftrightarrow x < 3$$

であるから、 $0 < x < 3$ となり、 V は

$$V = \frac{1}{12} \sqrt{3x^2 - x^3}$$

となる。 $f(x) = 3x^2 - x^3$ とおくと

$$\begin{aligned}f'(x) &= 6x - 3x^2 \\ &= -3x(x - 2)\end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	(0)	...	2	...	(3)
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗		↘	

$x = 2$ のとき $f(x)$ は最大となり、このとき V も最大となるから、求める m の値は

$$m = \sqrt{2}$$

である。

(答) $\sqrt{2}$

(1)

さいころを1回投げて5または6の目が出るという事象を A 、5, 6以外の目が出る事象を B

とする。 A, B が起こる確率はそれぞれ $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ である。 $p(3, 3)$ はさいころを3回投げて A が3

回起こる確率であるから、

$$\begin{aligned} p(3, 3) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

となる。 $p(3, 2), p(3, 0)$ は起こりえないから

$$p(3, 2) = p(3, 0) = 0$$

となる。 $p(3, 1)$ はさいころを3回投げて A が2回、 B が1回起こる確率であるから、

$$\begin{aligned} p(3, 1) &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p(3, 3) = \frac{1}{27}, \quad p(3, 2) = 0, \quad p(3, 1) = \frac{2}{9}, \quad p(3, 0) = 0$$

(2)

X_3 のとりうる値は $-3, -1, 1, 3$ であり、(1)と同様に考えると

$$\begin{aligned} p(3, -1) &= 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(3, -3) &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ &= \frac{8}{27} \end{aligned}$$

となる。よって求める期待値は

$$\begin{aligned} E &= 3 \cdot \frac{1}{27} + 1 \cdot \frac{2}{9} + (-1) \cdot \frac{4}{9} + (-3) \cdot \frac{8}{27} \\ &= -1 \end{aligned}$$

となる。

(答) -1

(3)

n が奇数のとき、 $X_n = 0$ になることはない。 n が偶数のとき、 $X_n = 0$ となるのは A が $\frac{n}{2}$ 回、

B が $\frac{n}{2}$ 回起こるときであり、その確率は

$${}_nC_{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{\left\{\left(\frac{n}{2}\right)!\right\}^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n$$

となる。したがって、

$$p(n, 0) = \begin{cases} 0 & (n: \text{奇数}) \\ \frac{n!}{\left\{\left(\frac{n}{2}\right)!\right\}^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n & (n: \text{偶数}) \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p(n, 0) = \begin{cases} 0 & (n: \text{奇数}) \\ \frac{n!}{\left\{\left(\frac{n}{2}\right)!\right\}^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n & (n: \text{偶数}) \end{cases}$$

(1)

すべての自然数 n に対して

$$r_{n+1} - \alpha = \beta \frac{r_n - \alpha}{2r_n + 1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つような定数 α, β を求める。まず、問題文で与えられた漸化式から、

$$r_1 = 0, r_2 = 2, r_3 = \frac{4}{5}$$

と求まる。①は特に $n=1, 2$ で成立するから、

$$\begin{cases} 2 - \alpha = \beta(-\alpha) & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ \frac{4}{5} - \alpha = \beta \frac{2 - \alpha}{5} & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

が成り立つことが必要である。③の両辺を α 倍して②を代入すると

$$\begin{aligned} \alpha \left(\frac{4}{5} - \alpha \right) &= - (2 - \alpha) \frac{2 - \alpha}{5} \\ \Leftrightarrow \alpha^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \alpha &= \pm 1 \end{aligned}$$

を得る。よって、②より $\alpha=1$ のとき $\beta=-1$ となり、 $\alpha=-1$ のとき $\beta=3$ となる。ここで $(\alpha, \beta) = (1, -1)$ のとき①は

$$\begin{aligned} r_{n+1} - 1 &= (-1) \frac{r_n - 1}{2r_n + 1} \\ \therefore r_{n+1} &= \frac{r_n + 2}{2r_n + 1} \end{aligned}$$

となり、 $(\alpha, \beta) = (-1, 3)$ のとき①は

$$\begin{aligned} r_{n+1} + 1 &= 3 \cdot \frac{r_n + 1}{2r_n + 1} \\ \therefore r_{n+1} &= \frac{r_n + 2}{2r_n + 1} \end{aligned}$$

となるから、 $(\alpha, \beta) = (1, -1), (-1, 3)$ のとき①はすべての自然数 n について成立する。したがって求める α, β の組み合わせは

$$(\alpha, \beta) = (1, -1), (-1, 3)$$

である。

(答) $(\alpha, \beta) = (1, -1), (-1, 3)$

(2)

(1)より

$$\begin{cases} r_{n+1} - 1 = (-1) \frac{r_n - 1}{2r_n + 1} & \cdots \cdots \textcircled{4} \\ r_{n+1} + 1 = 3 \frac{r_n + 1}{2r_n + 1} & \cdots \cdots \textcircled{5} \end{cases}$$

を得る。ここで $r_1 = 0, r_{n+1} = \frac{r_n + 2}{2r_n + 1}$ より、帰納的にすべての自然数 n に対して $r_n \geq 0$ であることがわかる。よって、④÷⑤より

$$\frac{r_{n+1} - 1}{r_{n+1} + 1} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{r_n - 1}{r_n + 1}$$

となる。これを与えられた式と比較すると

$$(p, q, k) = \left(1, -1, -\frac{1}{3} \right)$$

となる。これは $p \neq q$ を満たす。(答) $(p, q, k) = \left(1, -1, -\frac{1}{3} \right)$

(3)

(2)より、 $\frac{r_{n+1} - 1}{r_{n+1} + 1} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{r_n - 1}{r_n + 1}$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{r_n - 1}{r_n + 1} &= \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \cdot \frac{r_1 - 1}{r_1 + 1} \\ &= -\left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

を得る。よって

$$\begin{aligned} r_n - 1 &= -\left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} (r_n + 1) \\ \Leftrightarrow \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\} r_n &= 1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \\ \therefore r_n &= \frac{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1}}{1 + \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1}} \end{aligned}$$

となる。

(答) $r_n = \frac{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1}}{1 + \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1}}$

(4)

 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} = 0$ より、(3)の結果と合わせて

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} r_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1}}{1 + \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) 1