

1

(1)

3等が1本以上当たるためには3等のくじ3本の中から2本ひくか、3等のくじ3本の中から1本と他の17本の中から1本を選ぶかすればよいので、求める確率は

$$\frac{{}_3C_2 + 3 \cdot 17}{{}_{20}C_2} = \frac{27}{95}$$

である。

(答)  $\frac{27}{95}$

(2)

賞金の総額が1000円となるためには、1等とはずれのくじを1本ずつひくか、2等のくじを2本ひけばよいので、求める確率は、

$$\begin{aligned}\frac{14 + {}_2C_2}{{}_{20}C_2} &= \frac{15}{190} \\ &= \frac{3}{38}\end{aligned}$$

である。

(答)  $\frac{3}{38}$

(3)

賞金の総額として考えられる額は1500円、1100円、1000円、600円、500円、200円、100円、0円である。

[1] 1500円となる確率

1等を1本、2等を1本引けばよいから、確率は $\frac{2}{190}$ である。

[2] 1100円となる確率

1等を1本、3等を1本引けばよいから、確率は $\frac{3}{190}$ である。

[3] 1000円となる確率

(2)より $\frac{15}{190}$ である。

[4] 600円となる確率

2等を1本、3等を1本引けばよいから、確率は $\frac{2 \cdot 3}{190} = \frac{6}{190}$ である。

[5] 500円となる確率

2等を1本、はずれを1本引けばよいから、確率は $\frac{2 \cdot 14}{190} = \frac{28}{190}$ である。

[6] 200円となる確率

3等を2本引けばよいから、確率は $\frac{{}_3C_2}{190} = \frac{3}{190}$ である。

[7] 100円となる確率

3等を1本、はずれを1本引けばよいから、確率は $\frac{3 \cdot 14}{190} = \frac{42}{190}$ である。

以上[1]～[7]より賞金の総額の期待値は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{190}(1500 \cdot 2 + 1100 \cdot 3 + 1000 \cdot 15 + 600 \cdot 6 + 500 \cdot 28 + 200 \cdot 3 + 100 \cdot 42) &= \frac{43700}{190} \\ &= 230\end{aligned}$$

となる。

(答) 230円

(4)

2本分の参加料 $2x$ が230未満ならくじを引くことが得であるといえる。

$$\begin{aligned}2x &< 230 \\ \Leftrightarrow x &< 115\end{aligned}$$

であるから、 $x$ が114までなら得だといえる。

(答) 114

(1)

$\angle AOM = \theta$  とおく。  $\triangle OAB$  の対称性より

$$OM = ON$$

である。また、  $\angle AOB = 3\angle AOM$  であるから、

$$\angle AOM = \angle MON = \angle NOB$$

である。  $ON = k$  とおくと、  $\triangle OAM$  と  $\triangle OMN$  の面積比を考えることにより、

$$\begin{aligned} AM : MN &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot k \cdot \sin \theta : \frac{1}{2} \cdot k \cdot k \cdot \sin \theta \\ \Leftrightarrow AM : MN &= 1 : k \end{aligned}$$

であり、同様に  $\triangle OMN$  と  $\triangle ONB$  についても考えると、

$$MN : NB = k : 1$$

となる。これらより

$$AM : MB = 1 : k + 1$$

である。いま  $AM : MB = t : 1$  であるから、

$$\begin{aligned} 1 : k + 1 &= t : 1 \\ \Leftrightarrow k + 1 &= \frac{1}{t} \\ \therefore k &= \frac{1-t}{t} \end{aligned}$$

である。よって  $ON = \frac{1-t}{t}$  が示された。

(証明終)

(2)

$\triangle OAM$  と  $\triangle OMB$  の面積比を考えることにより、

$$\begin{aligned} AM : MB &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot k \cdot \sin \theta : \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot k \cdot \sin 2\theta \\ \Leftrightarrow AM : MB &= \sin \theta : 2 \sin \theta \cos \theta \\ \Leftrightarrow t : 1 &= 1 : 2 \cos \theta \\ \Leftrightarrow t : 1 &= 1 : 2y \\ \therefore y &= \frac{1}{2t} \end{aligned}$$

である。よって3倍角の公式より、

$$\begin{aligned} x &= \cos 3\theta \\ &= 4y^3 - 3y \\ \therefore x &= \frac{1-3t^2}{2t^3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{1-3t^2}{2t^3}, \quad y = \frac{1}{2t}$$

(3)

$x = -y^2$  が成り立つとき、

$$\begin{aligned} \frac{1-3t^2}{2t^3} &= -\frac{1}{4t^2} \\ \Leftrightarrow 6t^2 - t - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{2}{3}, -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。  $t > 0$  であるから、

$$t = \frac{2}{3}$$

である。また  $\triangle OMN$  について余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} MN^2 &= 2k^2 - 2k^2 \cos \theta \\ &= 2k^2 \left( 1 - \frac{1}{2t} \right) \end{aligned}$$

である。いま  $MN : AB = k : k + 2$  であるから、

$$\begin{aligned} AB &= \frac{k+2}{k} \sqrt{2k^2 \left( 1 - \frac{1}{2t} \right)} \\ &= (k+2) \sqrt{2 - \frac{1}{t}} \quad (\because k > 0) \\ &= \left( \frac{1}{t} + 1 \right) \sqrt{2 - \frac{1}{t}} \\ &= \frac{5}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{2}{3}, \quad AB = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$



3

(1)

$$\begin{aligned} 3a_{n+1} - 4a_n + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3(a_{n+1} - 1) &= 4(a_n - 1) \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - 1 &= \frac{4}{3}(a_n - 1) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} a_n - 1 &= \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} (a_1 - 1) \\ \therefore a_n &= 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \quad (\because a_1 = 2) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{\frac{4}{3} \left\{ 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \right\} - \frac{1}{3}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{4}{3} - \frac{\frac{1}{3}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1}{3} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}} \right\} \end{aligned}$$

である。ここで,

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} > 0$$

であることから

$$0 < \frac{1}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}} < 1$$

である。したがって

$$0 < \frac{1}{3} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}} \right\} < 1$$

となるので,  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  の整数部分は1, 小数部分は  $\frac{1}{3} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}} \right\}$  である。よって,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{3} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}}$$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_k} &= 3 \left\{ 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \right\} \text{ より} \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} &= 3n + 3 \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= 3n + 3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}} \\ &= 3n + 12 - 12 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 3n + 12 - 12 \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

(1)

$h(x) = x(2 + \cos x) - 3\sin x$  とおくと,

$$h'(x) = 2 - 2\cos x - x\sin x$$

$$h''(x) = \sin x - x\cos x$$

$$h'''(x) = x\sin x$$

である。よって  $0 < x < \pi$  のとき,  $\sin x > 0$  より

$$h'''(x) = x\sin x > 0$$

である。よって  $h''(x)$  は  $0 < x < \pi$  で単調増加であるので

$$h''(x) > h''(0) = 0$$

である。よって  $h'(x)$  は  $0 < x < \pi$  で単調増加であるので

$$h'(x) > h'(0) = 0$$

である。よって  $h(x)$  は  $0 < x < \pi$  で単調増加であるので

$$h(x) > h(0) = 0$$

である。以上より  $0 < x < \pi$  で  $f(x) < g(x)$  であることが示された。また  $0 < x < \pi$  で  $\sin x > 0$  だから,  $0 < x < \pi$  のとき  $0 < f(x) < g(x)$  である。

(証明終)

(2)

求める面積は,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi h(x) dx &= \int_0^\pi (2x + x\cos x - 3\sin x) dx \\ &= \int_0^\pi (2x - 3\sin x) dx + \int_0^\pi \{x(\sin x)'\} dx \\ &= \int_0^\pi (2x - 3\sin x) dx + [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx \\ &= [x^2 + 4\cos x + x\sin x]_0^\pi \\ &= (\pi^2 - 4) - 4 \\ &= \pi^2 - 8 \end{aligned}$$

である。

(答)  $\pi^2 - 8$

5

(1)

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} t-2 \\ \frac{1}{2}t^2 - 3t + 6 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 2t-2 \\ 2t^2 - 6t + 6 \end{pmatrix}$$

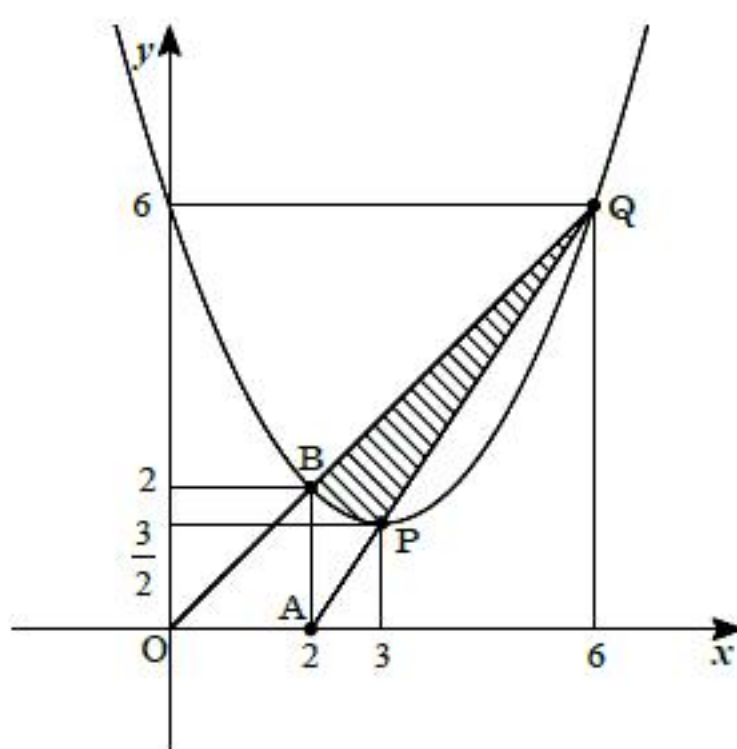
である。これらが平行になればよいから、これら二つのベクトルで張られた平行四辺形の面積が0になるという条件より、

$$\begin{aligned} (t-2)(2t^2 - 6t + 6) - (2t-2)\left(\frac{1}{2}t^2 - 3t + 6\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2(t-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow t=3 \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

となる。よって  $t_0 = 3$  である。

(答)  $t_0 = 3$ 

(2)



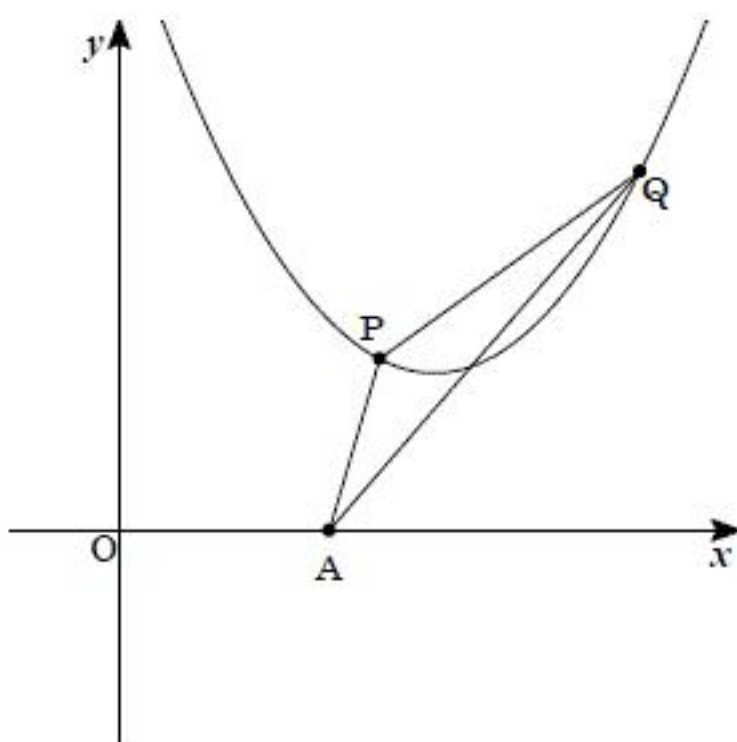
上図斜線部の面積を求めればよい。上図のように  $B(2, 2)$  とおくと、求める面積は、

$$\begin{aligned} \triangle AQB - \int_2^3 \left\{ \left( \frac{x^2}{2} - 3x + 6 \right) - \left( \frac{3}{2}x - 3 \right) \right\} dx \\ = 4 - \int_2^3 \left( \frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}x + 9 \right) dx \\ = 4 - \left[ \frac{x^3}{6} - \frac{9x^2}{4} + 9x \right]_2^3 \\ = 4 - \frac{11}{12} \\ = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

である。

(答)  $\frac{37}{12}$ 

(3)



このとき  $A, P, Q$  の位置関係は上図のようになる。したがって、

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \left| (2t-2) \left( \frac{1}{2}t^2 - 3t + 6 \right) - (t-2)(2t^2 - 6t + 6) \right| \\ &= \frac{1}{2} |3t^2 - t^3| \\ &= \frac{1}{2} |t^2(3-t)| \end{aligned}$$

である。  $0 < t < 3$  のとき

$$3-t > 0$$

であるから

$$S(t) = \frac{1}{2} (3t^2 - t^3)$$

である。よって

$$\begin{aligned} S'(t) &= \frac{1}{2} (6t - 3t^2) \\ &= \frac{3}{2} t(2-t) \end{aligned}$$

であるから、次の増減表を得る。

|         |     |     |   |     |     |
|---------|-----|-----|---|-----|-----|
| $t$     | (0) | ... | 2 | ... | (3) |
| $S'(t)$ |     | +   | 0 | -   |     |
| $S(t)$  |     | ↗   | 2 | ↘   |     |

したがって  $S(t)$  は  $t=2$  において最大値2をとる。

(答) 最大値2 ( $t=2$ )