

1

(1)

OM = s より AN : NM = 1 : s なので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AN} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{1+s} \cdot \frac{1}{1+t} \overrightarrow{AB} \\ &= \vec{a} + \frac{1}{(1+s)(1+t)} (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \frac{ts+t+s}{(1+s)(1+t)} \vec{a} + \frac{1}{(1+t)(1+s)} \vec{b}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{ts+t+s}{(1+s)(1+t)} \vec{a} + \frac{1}{(1+t)(1+s)} \vec{b}$$

(2)

AN = MB のとき,

$$AN : NM : MB = 1 : s : 1$$

となり, また AM : MB = 1 : t であるから,

$$\begin{aligned}1+s:1 &= 1:t \\ \Leftrightarrow t(1+s) &= 1 \\ \therefore t &= \frac{1}{1+s}\end{aligned}$$

である。このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON} &= \frac{ts+t+s}{(1+s)(1+t)} \vec{a} + \frac{1}{(1+t)(1+s)} \vec{b} \\ &= \frac{1+s}{2+s} \vec{a} + \frac{1}{2+s} \vec{b}\end{aligned}$$

であり, ON = s となるから

$$\begin{aligned}s^2 &= \left(\frac{1+s}{2+s} \right)^2 + \left(\frac{1}{2+s} \right)^2 + 2 \cdot \frac{1+s}{(2+s)^2} \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \Leftrightarrow s^2 (2+s)^2 &= (1+s)^2 + 1 + 2(1+s) \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{2} (s^3 + 3s^2 - 2) \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{2} (s+1)(s^2 + 2s - 2) \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{t} \right)^2 - 3 \right\} \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{2t^3} - \frac{3}{2t}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2t^3} - \frac{3}{2t}$$

(3)

OA = OB かつ AN = BM から, 対称性より $\angle AON = \angle BOM$ となるので, ON が $\angle AOM$ の二等分線であることも考慮して,

$$\angle AON = \angle NOM = \angle BOM$$

である。よって $\angle AON = \theta$ とおくと,

$$\begin{aligned}x^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos^2 \theta + \cos 3\theta &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos^2 \theta + 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta (\cos \theta + 1)(4\cos \theta - 3) &= 0 \\ \therefore \cos \theta &= \frac{3}{4} \quad (\because 0 < \theta < \pi)\end{aligned}$$

である。三倍角の公式から

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= 4 \left(\frac{3}{4} \right)^3 - 3 \left(\frac{3}{4} \right) \\ &= -\frac{9}{16}\end{aligned}$$

である。よって $\triangle OAB$ について余弦定理より,

$$\begin{aligned}AB^2 &= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos 3\theta \\ &= 2 - 2 \left(-\frac{9}{16} \right) \\ &= \frac{25}{8}\end{aligned}$$

であり, $AB > 0$ より

$$AB = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

2

(1)

$$\begin{aligned} 3a_{n+1} - 4a_n + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3(a_{n+1} - 1) &= 4(a_n - 1) \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - 1 &= \frac{4}{3}(a_n - 1) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} a_n - 1 &= \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} (a_1 - 1) \\ \therefore a_n &= 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \quad (\because a_1 = 2) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{\frac{4}{3} \left\{ 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \right\} - \frac{1}{3}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{4}{3} - \frac{\frac{1}{3}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1}{3} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}} \right\} \end{aligned}$$

である。ここで,

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} > 0$$

であることから

$$0 < \frac{1}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}} < 1$$

である。したがって

$$0 < \frac{1}{3} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}} \right\} < 1$$

となるので, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ の整数部分は1, 小数部分は $\frac{1}{3} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}} \right\}$ である。よって,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{3} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}}$$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_k} &= 3 \left\{ 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \right\} \text{ より} \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} &= 3n + 3 \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= 3n + 3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}} \\ &= 3n + 12 - 12 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 3n + 12 - 12 \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

3

(1)

$$\begin{aligned}
 A \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta & (a-b) \sin \theta \cos \theta \\ (a-b) \sin \theta \cos \theta & a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{4} = a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta \\ \frac{5}{4} = a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta \\ \frac{3}{4} = (a-b) \sin \theta \cos \theta \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - b(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ \frac{5}{2} = a(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + b(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ \frac{3}{4} = (a-b) \sin \theta \cos \theta \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b) \cos 2\theta = 0 \\ \frac{5}{2} = a+b \\ \frac{3}{2} = (a-b) \sin 2\theta \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

である。 $a-b=0$ のとき $\frac{3}{2} = (a-b) \sin 2\theta$ に反するので①より $\cos 2\theta = 0$ である。よって $0 \leq \theta$

$\leq \frac{\pi}{2}$ より

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

である。よって

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{4} \\ \frac{5}{2} = a+b \\ \frac{3}{2} = a-b \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a = 2 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, a = 2, b = \frac{1}{2}$$

(2)

(1)より

$$\begin{cases} A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} \\ A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} \\ (A^{-1})^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ (A^{-1})^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} & 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}} \\ 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}} & 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \end{pmatrix} \\ (A^{-1})^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} & -2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \\ -2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} & 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \end{pmatrix} \end{cases}
 \end{aligned}$$

である。よって

$$A^n + (A^{-1})^n = \begin{pmatrix} 2^n + \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 2^n + \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \begin{pmatrix} 2^n + \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 2^n + \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$$

(3)

$B = \begin{pmatrix} e & f \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと、 $B^2 = A$ より

$$\begin{pmatrix} e^2 + fc & (e+d)f \\ (e+d)c & fc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。まず

$$\begin{cases} e^2 + fc = fc + d^2 \\ (e+d)f = (e+d)c \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} e^2 = d^2 \\ (e+d)(f-c) = 0 \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

が必要であるが、 $e = -d$ のときは

$$(e+d)f = 0 \neq \frac{3}{4}$$

となり不適であるため、 $e = d$ がいえる。したがって②より

$$f = c$$

である。これらの必要条件を用いたとき①より

$$e^2 + f^2 = \frac{5}{4} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$2ef = \frac{3}{4} \quad \dots \textcircled{4}$$

である。④から

$$f = \frac{3}{8e} \quad \dots \textcircled{5}$$

であるから、⑤を③に代入して

$$\begin{aligned}
 e^2 + \left(\frac{3}{8e}\right)^2 &= \frac{5}{4} \\
 \Leftrightarrow 64e^4 - 80e^2 + 9 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (8e^2 - 1)(8e^2 - 9) &= 0 \\
 \Leftrightarrow e^2 &= \frac{1}{8}, \frac{9}{8} \\
 \therefore e &= \pm \frac{\sqrt{2}}{4}, \pm \frac{3\sqrt{2}}{4}
 \end{aligned}$$

である。⑤より

$$(e, f) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{3\sqrt{2}}{4}\right), \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

となる。以上より求める行列 B は

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{3\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{3\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{3\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{3\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

4

[1]

(1)

$I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$ とおくと,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \left(\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right)' e^t dt \\ &= \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} e^t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n+1} t^{n+1} e^t dt \\ &= \frac{e}{n+1} - \frac{1}{n+1} I_{n+1} \end{aligned}$$

より,

$$I_{n+1} = -(n+1)I_n + e$$

である。両辺を $(-1)^{n+1}(n+1)!$ で割ると

$$\frac{I_{n+1}}{(-1)^{n+1}(n+1)!} = \frac{I_n}{(-1)^n n!} + \frac{e}{(-1)^{n+1}(n+1)!}$$

である。ここで $J_n = \frac{I_n}{(-1)^n n!}$ とおくと,

$$J_{n+1} = J_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e$$

$$\begin{aligned} J_1 &= -I_1 \\ &= -\int_0^1 t e^t dt \\ &= -\left[t e^t - e^t \right]_0^1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} J_n &= -1 + e \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \\ \therefore I_n &= (-1)^{n+1} n! + e(-1)^n n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

である。いま $(-1)^{n+1} n!$ は整数であり, また任意の整数 k ($1 \leq k \leq n-1$) に対して $\frac{n!}{(k+1)!}$ は整数となるから,

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \\ b_n &= (-1)^{n+1} n! \end{aligned}$$

とおけるので, 整数 a_n, b_n はただ1組に定まる。よって題意は示された。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (-1)^{n+1} (n+1)! \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \right\} \cdot (-1)^{n+1} (n+1)! \\ &= \left\{ \frac{1}{(-1)^n n!} \cdot (-1)^n n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \right\} \cdot (-1)^{n+1} (n+1)! \\ &= \left\{ \frac{a_n}{(-1)^n n!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \right\} \cdot (-1)^{n+1} (n+1)! \\ &= -(n+1)a_n + 1 \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} a_{n+1}b_n - a_nb_{n+1} &= \{-(n+1)a_n + 1\} \cdot (-1)^{n+1} n! - a_n(-1)^{n+2}(n+1)! \\ &= (-1)^{n+1} n! \end{aligned}$$

である。

(答) $(-1)^{n+1} n!$

[2]

$\frac{\pi}{2} - x = t$ とおくと, $dx = -dt$ であり,

x	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	0

であるから,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(t)(-dt) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt \end{aligned}$$

である。したがって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。いま, $\frac{\sin 3x}{\sin x + \cos x}$ は区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ で連続な関数なので $f(x)$ とおける。よって①より,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x + \cos x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin\left(3x - \frac{3}{2}\pi\right)}{\cos x + \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos 3x}{\sin x + \cos x} dx \end{aligned}$$

となる。よって $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x + \cos x} dx$ とおくと

$$\begin{aligned} 2S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x + \cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos 3x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x - \cos 3x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(3\sin x - 4\sin^3 x) - (4\cos^3 x - 3\cos x)}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-4(\sin^3 x + \cos^3 x) + 3(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-4(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) + 3(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{-4(1 - \sin x \cos x) + 3\} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin x \cos x - 1) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin 2x - 1) dx \\ &= [-\cos 2x - x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

である。

(答) $1 - \frac{\pi}{4}$