

1

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{1+t} \overrightarrow{AB} \\ &= \vec{a} + \frac{1}{1+t} (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \frac{t}{1+t} \vec{a} + \frac{1}{1+t} \vec{b}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{t}{1+t} \vec{a} + \frac{1}{1+t} \vec{b}$$

(2)

線分 OQ は $\angle AOP$ の二等分線より

$$\begin{aligned}AQ : QP &= OA : OP \\ \Leftrightarrow AQ : QP &= 1 : k\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \frac{k}{1+k} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{1+k} \overrightarrow{OP} \\ &= \frac{k}{1+k} \vec{a} + \frac{1}{1+k} \left(\frac{t}{1+t} \vec{a} + \frac{1}{1+t} \vec{b} \right) \\ &= \frac{tk+t+k}{(1+k)(1+t)} \vec{a} + \frac{1}{(1+t)(1+k)} \vec{b}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{tk+t+k}{(1+k)(1+t)} \vec{a} + \frac{1}{(1+t)(1+k)} \vec{b}$$

(3)

$AQ = BP$ のとき,

$$AQ : QP : PB = 1 : k : 1$$

となり, また $AQ : QB = 1 : t$ であるから,

$$\begin{aligned}1 : 1+k &= 1 : t \\ \Leftrightarrow t+tk &= 1 \\ \therefore k &= \frac{1-t}{t}\end{aligned}$$

である。 $|\overrightarrow{OP}|^2 = k^2$ であるから

$$\begin{aligned}k^2 &= \left(\frac{1}{1+t} \right)^2 \left(t^2 |\vec{a}|^2 + 2t \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \right) \\ \Leftrightarrow 2t \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{(1-t)^2 (1+t)^2}{t^2} - t^2 - 1 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{-3t^2 + 1}{2t^3}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad k = \frac{1-t}{t}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{-3t^2 + 1}{2t^3}$$

(1)

$n=1$ のときは4がでればよいから、

$$p_1 = \frac{1}{7}$$

である。 $n=2$ のときは(1回目, 2回目)の数の出方が

$$(1, 3), (1, 7), (2, 2), (2, 6), (3, 1), (3, 5), (4, 4), \\ (5, 3), (5, 7), (6, 2), (6, 6), (7, 1), (7, 5)$$

であればよいので、

$$p_2 = \frac{13}{7^2} \\ = \frac{13}{49}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_1 = \frac{1}{7}, p_2 = \frac{13}{49}$$

(2)

n 回の試行によって得られた n 個の数の和を S_n とおく。 S_n が4で割り切れるとき、 S_{n+1} が4で割り切れる場合は、 $n+1$ 回目の試行で4が出る場合である。 S_n が4で割り切れないとき、 S_{n+1} が4で割り切れる場合を、 S_n を4で割った時の余りで場合分けして考える。

[1] 1のとき

$n+1$ 回目の試行で3か7が出れば S_{n+1} は4で割り切れる。

[2] 2のとき

$n+1$ 回目の試行で2か6が出れば S_{n+1} は4で割り切れる。

[3] 3のとき

$n+1$ 回目の試行で1か5が出れば S_{n+1} は4で割り切れる。

以上[1], [2], [3]より S_n が4で割り切れないとき、 S_{n+1} が4で割り切れる確率は $\frac{2}{7}$ である。 S_n が

4で割り切れない確率は $1-p_n$ であるから、

$$p_{n+1} = \frac{1}{7}p_n + \frac{2}{7}(1-p_n) \\ = -\frac{1}{7}p_n + \frac{2}{7}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad p_{n+1} = -\frac{1}{7}p_n + \frac{2}{7}$$

(3)

(2)より

$$p_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{7}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$$

であるから、

$$p_n - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{1}{4}\right) \\ \therefore p_n = \frac{1}{4} - \frac{3}{28}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}$$

である。したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{4}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{1}{4} - \frac{3}{28}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{4}$$

3

(1)

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

である。

$$(\text{答}) \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

(2)

 $y=f(x)$ の $x=t$ における接線の式は

$$y = \frac{1}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}(x-t) + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

である。これが $\left(0, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ を通るから、

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{-t}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$$

である。 t は実数であるから

$$\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 = t^2 + 1 \quad (t \geq 0)$$

$$\therefore t = 1 \quad (\because t \geq 0)$$

である。

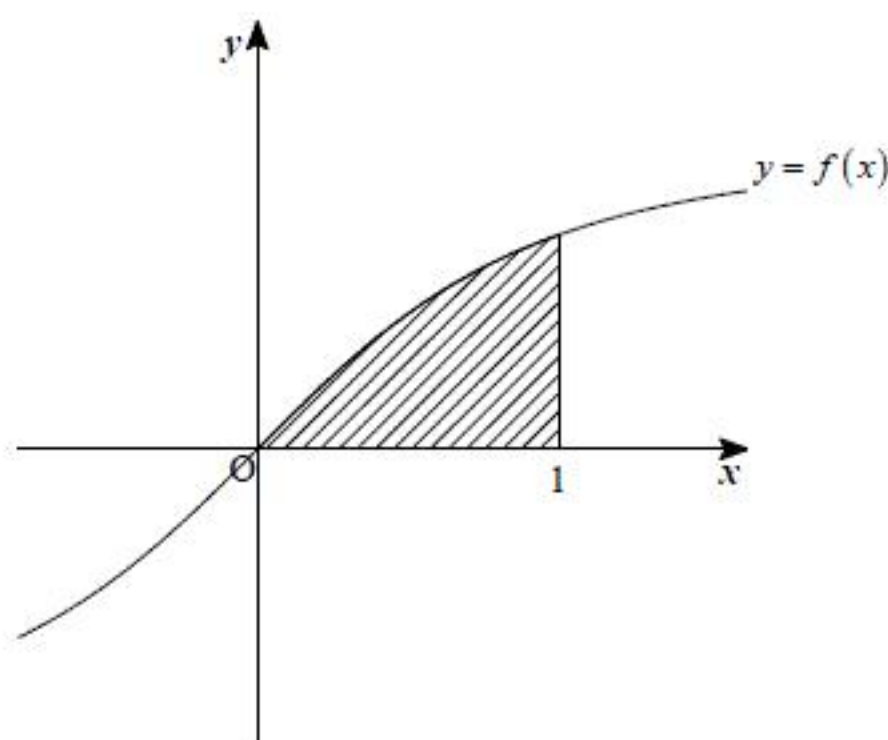
$$(\text{答}) \quad t = 1$$

(3)

$$x^2+1 > 0$$

であるから、(1)より

$$f'(x) > 0$$

である。よって $f(x)$ は x について単調増加であり、また $(0, 0)$ を通ることから、 $y=f(x)$ のグラフの概形は次のようになっている。したがって求める体積 V は、

$$V = \pi \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$= \pi - \pi \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

となる。ここで $x = \tan \theta$ と置換すると、 $\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ であり、

x	0	$\rightarrow$	1
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

であるから、

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

である。したがって

$$V = \pi - \pi \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi - \frac{\pi^2}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \pi - \frac{\pi^2}{4}$$

(1)

 $p > 1, q > 1$ より

$$(p-1)(q-1) > 0$$

であるから、

$$pq - p - q + 1 > 0$$

$$\therefore p + q < pq + 1$$

である。

(証明終)

(2)

求めるべき不等式

$$\sqrt{a+b-1} < \sqrt{a} + \sqrt{b} - 1$$

の両辺を2乗すると、

$$(\sqrt{a+b-1})^2 < (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow a+b-1 < a+b+1+2\sqrt{ab}-2\sqrt{a}-2\sqrt{b}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} < \sqrt{ab} + 1$$

となるから、初めに $\sqrt{a} + \sqrt{b} < \sqrt{ab} + 1$ を示す。 $a > 1, b > 1$ より

$$\sqrt{a} > 1, \sqrt{b} > 1$$

であるから、(1)より

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} < \sqrt{ab} + 1$$

は成り立つ。したがって

$$(\sqrt{a+b-1})^2 < (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2$$

も成り立つ。 $a > 1, b > 1$ より

$$\begin{cases} \sqrt{a+b-1} > 0 \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 > 0 \end{cases}$$

であるから、

$$\sqrt{a+b-1} < \sqrt{a} + \sqrt{b} - 1$$

は成り立つ。

(証明終)

(3)

 $a > 1, b > 1, c > 1$ であるから、

$$b+c-1 > 1$$

が成立する。したがって(2)で示した数式において b を $b+c-1$ に置き換えると

$$\sqrt{a+(b+c-1)-1} < \sqrt{a} + \sqrt{b+c-1} - 1$$

を得る。また、(2)より $\sqrt{b+c-1} < \sqrt{b} + \sqrt{c} - 1$ であるから、

$$\begin{aligned} \sqrt{a+b+c-2} &< \sqrt{a} + \sqrt{b+c-1} - 1 \\ &< \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} - 2 \end{aligned}$$

が成立する。

(証明終)