

(1)

$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ であるから、 $N = 2^a 3^b$ が 504 の約数となるのは、

$$a = 1, 2, 3 \text{ かつ } b = 1, 2$$

の場合である。さいころの出る目は 6 通りあり、それらは同様に確からしい。したがって、求める確率は

$$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

である。

(答) $\frac{1}{6}$

(2)

$N = 2^a 3^b$ の正の約数の個数は

$$(a+1)(b+1)$$

で表される。よって、 $N = 2^a 3^b$ の正の約数の個数が 12 個となるような (a, b) の組は、

$$(a+1, b+1) = (2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)$$

$$\therefore (a, b) = (1, 5), (2, 3), (3, 2), (5, 1)$$

の 4 組である。したがって、求める確率は

$$4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$$

である。

(答) $\frac{1}{9}$

(3)

$N = 2^a 3^b$ の正の約数のうち、3 の倍数でないものは $2^0, 2^1, \dots, 2^a$ の $(a+1)$ 個の数であるから、 N の正の約数の総和が 3 の倍数になるとき、これらの $(a+1)$ 個の数の総和が 3 の倍数となる。ここで、

$$\sum_{k=0}^a 2^k = \frac{2^{a+1} - 1}{2 - 1} = 2^{a+1} - 1$$

が 3 の倍数になる条件は、

$$a = 1, 3, 5$$

であるから、求める確率は、

$$3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$

(1)

$[a] \leq a < [a] + 1$ であるから, $a_n = [\log_3 n] = k$ を満たすとき

$$k \leq \log_3 n < k + 1$$

$$\Leftrightarrow 3^k \leq n < 3^{k+1}$$

である。これを満たす整数 n は

$$n = 3^k, 3^k + 1, \dots, 3^{k+1} - 1$$

より, 求める整数 n の個数は $(3^{k+1} - 1) - 3^k + 1 = (3 - 1) \cdot 3^k = 2 \cdot 3^k$ (個) である。

(答) $2 \cdot 3^k$ 個

(2)

(1)より $3^k \leq n < 3^{k+1}$ を満たすとき, $a_n = [\log_3 n] = k$ である。よって, $m \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} S(3^m - 1) &= \sum_{i=1}^{3^m-1} a_i \\ &= \sum_{i=3^0}^{3^1-1} a_i + \sum_{i=3^1}^{3^2-1} a_i + \dots + \sum_{i=3^{m-1}}^{3^m-1} a_i \\ &= 0 \cdot 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 2 \cdot 3^1 + \dots + (m-1) \cdot 2 \cdot 3^{m-1} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。①の両辺を3倍すると,

$$3S(3^m - 1) = 0 \cdot 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 2 \cdot 3^2 + \dots + (m-2) \cdot 2 \cdot 3^{m-1} + (m-1) \cdot 2 \cdot 3^m \quad \dots \textcircled{2}$$

が得られるから, ①-②を計算すると,

$$\begin{aligned} -2S(3^m - 1) &= 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + \dots + 2 \cdot 3^{m-1} - (m-1) \cdot 2 \cdot 3^m \\ &= 2 \sum_{k=1}^{m-1} 3^k - (m-1) \cdot 2 \cdot 3^m \\ &= 6 \cdot \frac{(3^{m-1} - 1)}{3 - 1} - (m-1) \cdot 2 \cdot 3^m \\ &= 3^m - 3 - (m-1) \cdot 2 \cdot 3^m \\ &= (3 - 2m) \cdot 3^m - 3 \end{aligned}$$

$$\therefore S(3^m - 1) = \frac{(2m-3) \cdot 3^m + 3}{2}$$

が得られる。この式において, $m=1$ とすると, $S(2)=0$ となり, $m=1$ の場合も成立する。よって,

$$S(3^m - 1) = \frac{(2m-3) \cdot 3^m + 3}{2}$$

である。

$$(答) \quad S(3^m - 1) = \frac{(2m-3) \cdot 3^m + 3}{2}$$

(3)

$S(n)$ は n について単調増加するため, (2)の結果を用いると,

$$\begin{aligned} S(3^5 - 1) &= \frac{7 \cdot 3^5 + 3}{2} = 852 \\ S(3^6 - 1) &= \frac{8 \cdot 3^6 + 3}{2} = 3282 \end{aligned}$$

より, $S(3^5 - 1) < 2017 < S(3^6 - 1)$ が得られる。したがって, $S(n) = 2017$ となる n は,

$$3^5 \leq n < 3^6 - 1$$

を満たす。この範囲において,

$$a_n = [\log_3 n] = 5$$

であり, $2017 - 852 = 1165 = 5 \cdot 233$ であるから,

$$n = 3^5 - 1 + 233 = 243 - 1 + 233 = 475$$

である。

(答) $n = 475$

(1)

$y = \sin x$ と $y = \sin(x - \theta)$ から y を消去して

$$\sin x = \sin(x - \theta)$$

$$\Leftrightarrow \text{「} x - \theta = x + 2n\pi \text{」 または 「} x - \theta = \pi - x + 2n\pi \text{」}$$

となる。ただし、 n は整数である。題意より $0 < \theta < \pi$ であるから

$$x = \frac{\theta + (2n+1)\pi}{2}$$

となる。

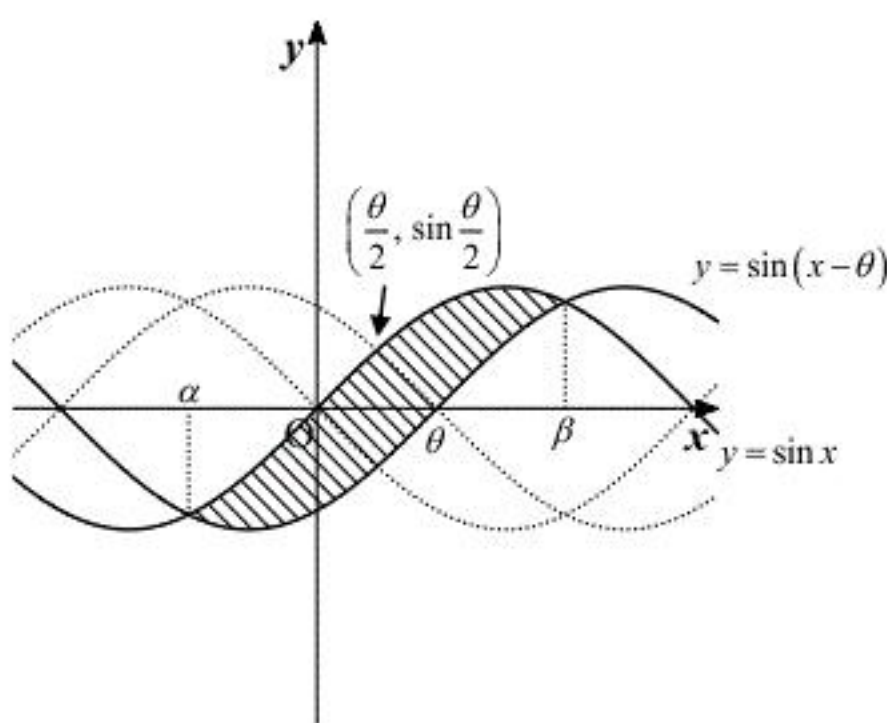
$$(\text{答}) \quad x = \frac{\theta + (2n+1)\pi}{2}$$

(2)

C_1, C_2 の交点の x 座標は(1)より整数 n に対して単調増加であるため、 $0 < \theta < \pi$ であることより

$$\alpha = \frac{\theta - \pi}{2}, \beta = \frac{\theta + \pi}{2}$$

である。 $\alpha \leq x \leq \beta$ の範囲における C_1, C_2 および、それらで囲まれた図形を図示すると以下のようになる。



三角関数の周期性、対称性より、 C_1, C_2 で囲まれた図形の $y \leq 0$ の部分を x 軸に関して折り

返してできる図形は、 $x = \frac{\theta}{2}$ に関して対称である。よって、求める体積は

$$\begin{aligned} V(\theta) &= 2 \left(\int_{\frac{\theta}{2}}^{\beta} \pi \sin^2 x \, dx - \int_{\theta}^{\beta} \pi \sin^2(x - \theta) \, dx \right) \\ &= \pi \int_{\frac{\theta}{2}}^{\beta} (1 - \cos 2x) \, dx - \pi \int_{\theta}^{\beta} \{1 - \cos 2(x - \theta)\} \, dx \\ &= \pi \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\theta}{2}}^{\beta} - \pi \left[x - \frac{1}{2} \sin 2(x - \theta) \right]_{\theta}^{\beta} \\ &= \pi \left\{ \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin 2\beta + \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2(\beta - \theta) \right\} \\ &= \pi \left\{ \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin(\theta + \pi) + \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \sin(\pi - \theta) \right\} \\ &= \frac{\pi}{2} (\theta + 3 \sin \theta) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V(\theta) = \frac{\pi}{2} (\theta + 3 \sin \theta)$$

(3)

(2)で得られた体積を θ で微分すると

$$\frac{dV(\theta)}{d\theta} = \frac{\pi}{2} (1 + 3 \cos \theta)$$

である。 $\frac{dV(\theta)}{d\theta} = 0$ となるのは $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ のときであり、 $0 < \theta < \pi$ の範囲でこれを満たすよう

な θ はただ1つだけ存在するから、この θ の値を γ とおくと、 $0 < \theta < \pi$ における $V(\theta)$ の増減表は以下のようになる。

θ	0	...	γ	...	π
$\frac{dV(\theta)}{d\theta}$		+	0	-	
$V(\theta)$		↗	極大	↘	

増減表より、 $V(\theta)$ は $\theta = \gamma$ のときに最大となる。したがって、求める値は

$$\cos \theta_0 = \cos \gamma = -\frac{1}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \cos \theta_0 = -\frac{1}{3}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 x^3 - x^2 - a^2x + a^2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x^2(x-1) - a^2(x-1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x^2 - a^2)(x-1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x-a)(x+a)(x-1) &= 0
 \end{aligned}$$

と変形できるから、求める x の値は

$$x = \pm a, 1$$

である。

(答) $x = \pm a, 1$

(2)

a の値で場合分けする。

[1] $0 \leq a < 1$ のとき

このとき、 $y = x^3 - x^2 - a^2x + a^2 = (x-a)(x+a)(x-1)$ は $-1 \leq x < -a$, $a \leq x < 1$ において非正、 $-a \leq x < a$ において非負の値をとるから

$$\begin{aligned}
 f(a) &= \int_{-1}^1 |x^3 - x^2 - a^2x + a^2| dx \\
 &= \int_{-1}^{-a} (-x^3 + x^2 + a^2x - a^2) dx + \int_{-a}^a (x^3 - x^2 - a^2x + a^2) dx + \int_a^1 (-x^3 + x^2 + a^2x - a^2) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{a^2}{2}x^2 - a^2x \right]_{-1}^{-a} + 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + a^2x \right]_0^a + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{a^2}{2}x^2 - a^2x \right]_a^1 \\
 &= \frac{8}{3}a^3 - 2a^2 + \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

となる。

[2] $1 \leq a$ のとき

このとき、 $y = x^3 - x^2 - a^2x + a^2 = (x-a)(x+a)(x-1)$ は $-1 \leq x \leq 1$ において非負の値をとるから

$$\begin{aligned}
 f(a) &= \int_{-1}^1 |x^3 - x^2 - a^2x + a^2| dx \\
 &= \int_{-1}^1 (x^3 - x^2 - a^2x + a^2) dx \\
 &= 2 \int_0^1 (-x^2 + a^2) dx \\
 &= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + a^2x \right]_0^1 \\
 &= 2a^2 - \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2] より,

$$f(a) = \begin{cases} \frac{8}{3}a^3 - 2a^2 + \frac{2}{3} & (0 \leq a < 1) \\ 2a^2 - \frac{2}{3} & (1 \leq a) \end{cases}$$

となる。

(答) 前述

(3)

(2) より $f(a)$ を a で微分して整理すると

$$f'(a) = \begin{cases} 8a^2 - 4a = 4a(2a-1) & (0 \leq a < 1) \\ 4a & (1 \leq a) \end{cases}$$

となる。よって、 $f(a)$ についての増減表は以下のようになる。

a	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1	...
$f'(a)$		-	0	+		+
$f(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$		$\nearrow$

増減表より、 $f(a)$ は $a = \frac{1}{2}$ のとき、最小値 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ をとる。

(答) $a = \frac{1}{2}$ のとき、最小値 $\frac{1}{2}$