

(1)

 $x+2y+5z=10n$ について、 $n=1$ のとき

$$x+2y+5z=10 \quad \cdots \textcircled{1}$$

であり、 x, y, z は 0 以上の整数より $x+2y \geq 0$ であるから、

$$0 \leq 5z \leq 10$$

$$\therefore z=0, 1, 2$$

である。

[1] $z=0$ のとき①は $x+2y=10$ となり、これを満たす x, y の組み合わせは

$$(x, y) = (0, 5), (2, 4), (4, 3), (6, 2), (8, 1), (10, 0)$$

の 6 組である。

[2] $z=1$ のとき①は $x+2y=5$ となり、これを満たす x, y の組み合わせは

$$(x, y) = (1, 2), (3, 1), (5, 0)$$

の 3 組である。

[3] $z=2$ のとき①は $x+2y=0$ となり、これを満たす x, y の組み合わせは

$$(x, y) = (0, 0)$$

のみである。

以上, [1], [2], [3] より

$$a_1 = 6 + 3 + 1 = 10$$

である。また、 $x+2y+5z=10n$ について、 $n=2$ のとき

$$x+2y+5z=20 \quad \cdots \textcircled{2}$$

であり、 $n=1$ の場合と同様にして

$$0 \leq 5z \leq 20$$

$$\therefore z=0, 1, 2, 3, 4$$

である。

[4] $z=0$ のとき②は $x+2y=20$ となり、これを満たす x, y の組み合わせは

$$(x, y) = (0, 10), (2, 9), (4, 8), (6, 7), (8, 6), (10, 5), (12, 4), (14, 3), (16, 2), (18, 1), (20, 0)$$

の 11 組である。

[5] $z=1$ のとき②は $x+2y=15$ となり、これを満たす x, y の組み合わせは

$$(x, y) = (1, 7), (3, 6), (5, 5), (7, 4), (9, 3), (11, 2), (13, 1), (15, 0)$$

の 8 組である。

[6] $z \geq 2$ のとき

②は、

$$x+2y+5z=20$$

$$\Leftrightarrow x+2y+5(z-2)=10$$

と変形でき、このとき、

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z-2 \geq 0$$

を満たすから、これは $n=1$ の場合の z を $z-2$ で置き換えたものと同じである。したがって、②を満たす x, y, z の組み合わせは a_1 組である。

以上, [4], [5], [6] より

$$a_2 = 11 + 8 + 10 = 29$$

である。

(答) $a_1 = 10, a_2 = 29$

(2)

 $x+2y+5z=10(n+1)$ について、(1)と同様に $x+2y \geq 0$ であるから、

$$0 \leq 5z \leq 10(n+1)$$

$$\therefore z=0, 1, 2, \dots, 2(n+1)$$

である。

[1] $z=0$ のときこのとき、 $x+2y=10(n+1)$ となり、これを満たす x, y の組は

$$(x, y) = (0, 5(n+1)), (2, 5(n+1)-1), (4, 5(n+1)-2), \dots, (10(n+1)-2, 1), (10(n+1), 0)$$

の $5(n+1)+1$ 組である。[2] $z=1$ のときこのとき、 $x+2y=10(n+1)-5$ となり、これを満たす x, y の組は

$$(x, y) = (1, 5(n+1)-3), (3, 5(n+1)-4), (5, 5(n+1)-5), \\ \dots, (10(n+1)-9, 2), (10(n+1)-7, 1), (10(n+1)-5, 0)$$

の $5(n+1)-2$ 組である。[3] $z \geq 2$ のとき

このとき、

$$x+2y+5z=10(n+1)$$

$$\Leftrightarrow x+2y+5(z-2)=10n$$

と変形でき、

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z-2 \geq 0$$

を満たすから、これは $x+2y+5z=10n$ の場合の z を $z-2$ で置き換えたものと同じである。したがって、 $x+2y+5z=10(n+1)$ を満たす x, y, z の組み合わせは a_n 組である。

以上, [1], [2], [3] より

$$a_{n+1} = 5(n+1)+1+5(n+1)-2+a_n$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = 10n+9$$

であるから、

$$b_n = a_{n+1} - a_n = 10n+9$$

である。

(答) $b_n = 10n+9$

(3)

 $a_{n+1} - a_n = b_n$ より、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 10 + \sum_{k=1}^{n-1} (10k+9) \\ &= 10 + 10 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) + 9(n-1) \\ &= 5n^2 + 4n + 1 \end{aligned}$$

である。これに $n=1$ を代入すると $a_1 = 10$ となり、 $n=1$ の場合も満たすから、すべての自然数 n に対して

$$a_n = 5n^2 + 4n + 1$$

である。

(答) $a_n = 5n^2 + 4n + 1$

(1)

産まれてくる子どもの性別が男である事象を A 産まれてくる子どもの性別が女である事象を B 産まれてくる子どもの性別を男と判定する事象を C 産まれてくる子どもの性別を女と判定する事象を D

とおき、それぞれの確率を $P(A), P(B), P(C), P(D)$ と表す。また、事象 X の下で事象 Y が起きる条件付き確率を $P_X(Y)$ と表す。題意より

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, P_A(C) = \frac{17}{20}, P_B(D) = \frac{3}{4}$$

である。このとき、 $P_B(C) + P_B(D) = 1$ であるから、求める確率 $P_B(C)$ は

$$P_B(C) = 1 - P_B(D) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

である。

(答) $\frac{1}{4}$

(2)

$P(C)$ は産まれてくる子どもが男でも女でも、検査結果が男となる確率であるから、

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A \cap C) + P(B \cap C) \\ &= P(A)P_A(C) + P(B)P_B(C) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{11}{20} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{11}{20}$

(3)

検査結果が男であるとき、産まれてくる子どもが男である確率 $P_C(A)$ は

$$P_C(A) = \frac{P(C \cap A)}{P(C)} = \frac{P(A)P_A(C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{17}{20}}{\frac{11}{20}} = \frac{17}{22}$$

である。一方、検査結果が女であるとき、産まれてくる子どもが女である確率 $P_D(B)$ は

$$\begin{aligned} P_D(B) &= \frac{P(D \cap B)}{P(D)} \\ &= \frac{P(B \cap D)}{P(A \cap D) + P(B \cap D)} \\ &= \frac{P(B)P_B(D)}{P(A)P_A(D) + P(B)P_B(D)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{17}{20}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

である。よって、 $\frac{17}{22} < \frac{5}{6}$ より $P_C(A) < P_D(B)$ であるから、検査結果が女である場合の方が、より

高い確率で正しい。

(答) 検査結果が女である場合

(1)

曲線 $C: x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ について

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

である。点 $P(\theta - \sin \theta, 1 - \cos \theta)$ における法線 ℓ は、点 P を通り、点 P における接線と垂直な直線である。 $0 < \theta < \pi$ より $\sin \theta \neq 0$ であるから

$$\begin{aligned} y - (1 - \cos \theta) &= -\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \{x - (\theta - \sin \theta)\} \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} x + \frac{\theta(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} \end{aligned}$$

が法線 ℓ の方程式である。

$$(\text{答}) \quad y = -\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} x + \frac{\theta(1 - \cos \theta)}{\sin \theta}$$

(2)

点 Q の x 座標は π であり、 y 座標は $-\frac{\pi(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} + \frac{\theta(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} = \frac{(\theta - \pi)(1 - \cos \theta)}{\sin \theta}$ であるから、

$$\begin{aligned} PQ^2 &= \left\{ \pi - (\theta - \sin \theta) \right\}^2 + \left\{ \frac{(\theta - \pi)(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} - (1 - \cos \theta) \right\}^2 \\ &= (\pi - \theta + \sin \theta)^2 + \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} (\theta - \pi - \sin \theta)^2 \\ &= (\pi - \theta + \sin \theta)^2 \left\{ 1 + \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} \right\} \\ &= (\pi - \theta + \sin \theta)^2 \left(\frac{\sin^2 \theta + 1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) \\ &= \frac{2}{\sin^2 \theta} (\pi - \theta + \sin \theta)^2 (1 - \cos \theta) \\ &= 2 \left(\frac{\pi - \theta}{\sin \theta} + 1 \right)^2 (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

である。ここで、 $\pi - \theta = \alpha$ とおくと、 $0 < \theta < \pi$ より $0 < \alpha < \pi$ であり、

$$PQ^2 = 2 \left\{ \frac{\alpha}{\sin(\pi - \alpha)} + 1 \right\}^2 \{1 - \cos(\pi - \alpha)\} = 2 \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} + 1 \right)^2 (1 + \cos \alpha)$$

と表せる。よって、 $PQ > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \pi-0} f(\theta) &= \lim_{\theta \rightarrow \pi-0} PQ \\ &= \lim_{\pi-\theta \rightarrow +0} \sqrt{2 \left(\frac{\pi - \theta}{\sin(\pi - \theta)} + 1 \right)^2 \{1 + \cos(\pi - \theta)\}} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \sqrt{2 \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} + 1 \right)^2 (1 + \cos \alpha)} \\ &= \sqrt{2 \cdot (1+1)^2 \cdot (1+1)} \\ &= 4 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi-0} f(\theta) = 4$$

(3)

$0 < \theta < \pi$ より $0 < t < \pi$ で考える。このとき、

$$\begin{aligned} s &= \int_0^\theta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^\theta \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^\theta \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^\theta \sqrt{2(1 - \cos t)} dt \\ &= \int_0^\theta \sqrt{2 \cdot 2 \cdot \frac{1 - \cos t}{2}} dt \\ &= \int_0^\theta \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\ &= \int_0^\theta 2 \sin \frac{t}{2} dt \quad (\because 0 < t < \theta < \pi) \\ &= 2 \left[-2 \cos \frac{t}{2} \right]_0^\theta \\ &= -4 \cos \frac{\theta}{2} + 4 \\ &= 4 \left(1 - \cos \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

である。また、(1)で求めた法線 ℓ の方程式において $y = 0$ とすると、 $x = \theta$ であるから、点 R の座標は $(\theta, 0)$ とわかる。したがって、

$$\begin{aligned} PR &= \sqrt{\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2} \\ &= \sqrt{2(1 - \cos \theta)} \\ &= 2 \sin \frac{\theta}{2} \quad (\because 0 < \theta < \pi) \end{aligned}$$

である。よって、三角関数の合成より、

$$2PR - s = 2 \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} - 4 \left(1 - \cos \frac{\theta}{2} \right) = 4 \left(\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right) - 4 = 4\sqrt{2} \sin \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - 4$$

と表せる。 $0 < \theta < \pi$ より $\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} &< \sin \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \\ \Leftrightarrow 4 &< 4\sqrt{2} \sin \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \\ \Leftrightarrow 0 &< 4\sqrt{2} \sin \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - 4 \\ \Leftrightarrow 0 &< 2PR - s \end{aligned}$$

である。以上より、 $s < 2PR$ が示された。

(証明終)

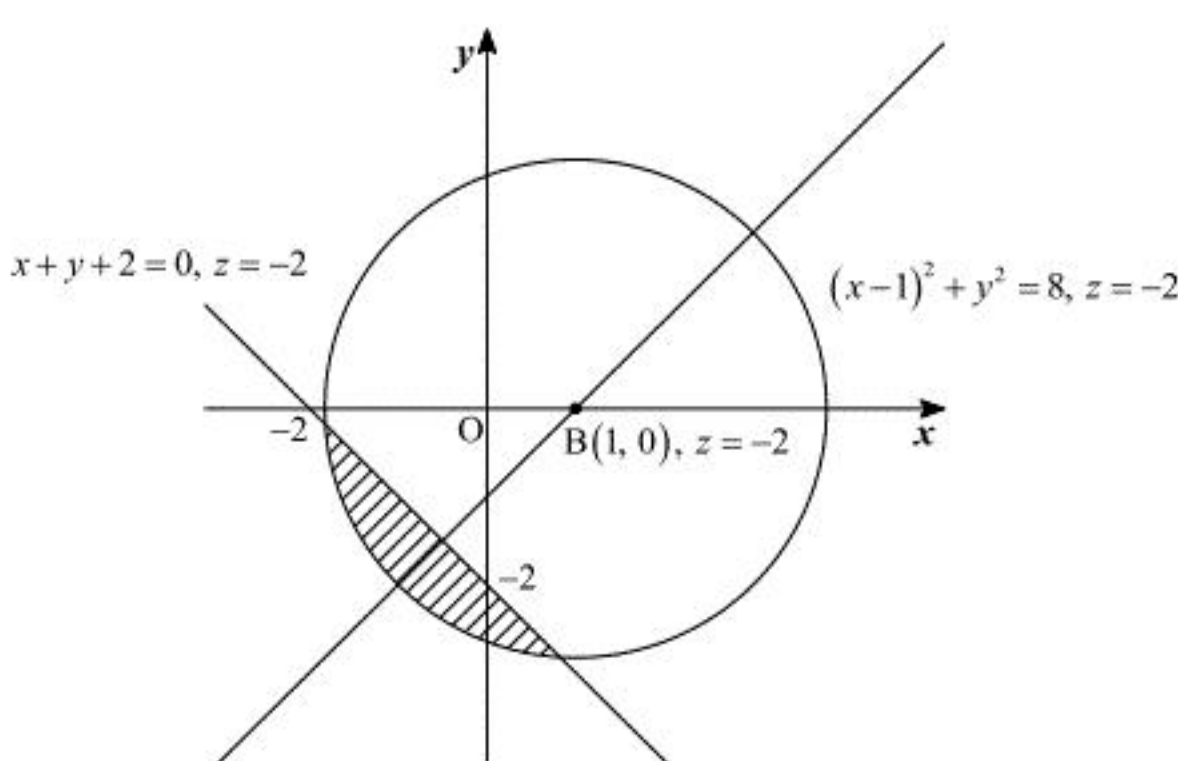
(1)

球面 $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 8$ の中心を B とおくと、 $B(1, 0, -2)$ である。 $z = -2$ での断面を考え

る。平面 α が平面 $z = -2$ と交わってできる直線は、平面 α と平面 $z = 0$ との交線を z 軸方向に -2 だけ平行移動したものである。平面 α が平面 $z = 0$ と交わってできる直線は、直線 $x = -\sqrt{2}$ を原点を中心に反時計回りに 45° だけ回転させた直線であるから、 $x + y + 2 = 0, z = 0$ で表される。よって、平面 α と平面 $z = -2$ との交線は、

$$x + y + 2 = 0, z = -2$$

である。したがって、 $z = -2$ での断面図を図示すると、以下のようになる。



図中の、境界線を含む斜線部分は平面 α と曲面 β とで囲まれた部分の $z = -2$ での断面である。

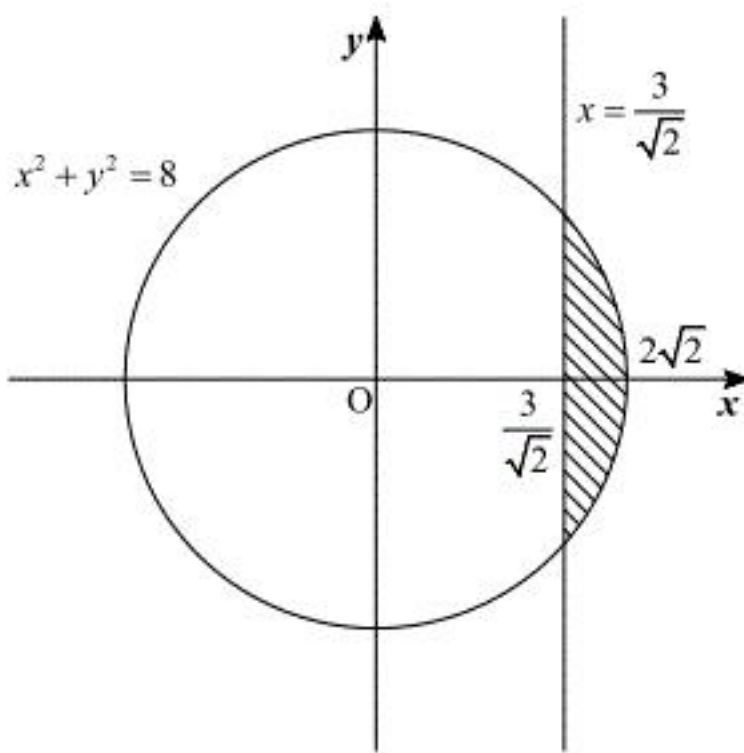
点 B と平面 α の距離は、上図の xy 平面における $B(1, 0)$ と $x + y + 2 = 0$ との距離に等しく、

$$\frac{|1+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

である。したがって、平面 α と曲面 β とで囲まれた部分の体積は

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 8 \\ x \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

で表される以下の斜線部のような図形を x 軸のまわりに1回転して得られる立体の体積に等しい。



よって、求める体積は

$$\int_{\frac{3}{\sqrt{2}}}^{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} \pi y^2 dx = \int_{\frac{3}{\sqrt{2}}}^{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} \pi (8 - x^2) dx = \pi \left[8x - \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{3}{\sqrt{2}}}^{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \frac{11\sqrt{2}}{12} \pi$$

である。

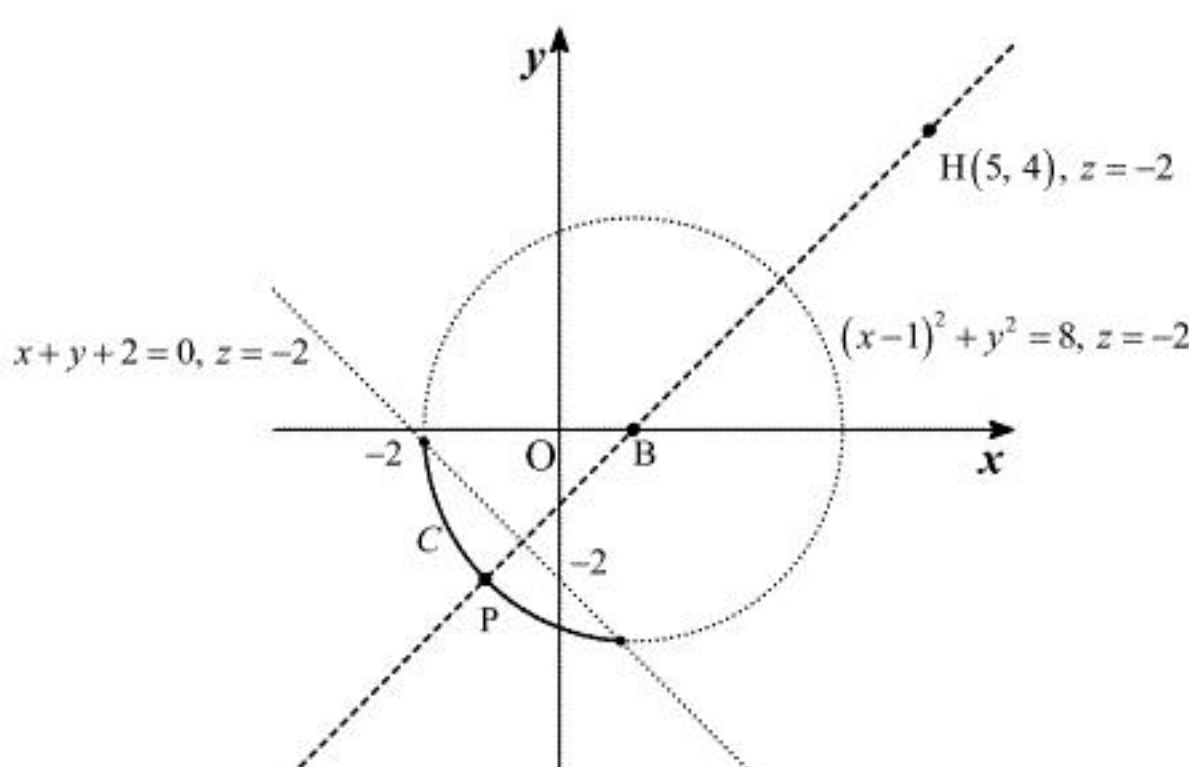
$$(\text{答}) \frac{11\sqrt{2}}{12} \pi$$

(2)

点 A から平面 $z = -2$ へ下ろした垂線の足を H とおくと、 $H(5, 4, -2)$ であり、三平方の定理より、

$$AP = \sqrt{AH^2 + HP^2} = \sqrt{3^2 + HP^2}$$

と表すことができる。よって、 AP が最大るとき HP も最大であるから、 HP の最大値を求める。以下に、平面 $z = -2$ における曲線 C および点 H を図示する。



曲線 C は上図の実線部のようになり、 $HP \leq HB + BP$ より、 HP が最大となるのは、

$HP = HB + BP$ となるとき、すなわち H, B, P が一直線上に位置するときである。したがって、

$$\begin{aligned} HP &= HB + BP \\ &= 2\sqrt{2} + \sqrt{(5-1)^2 + 4^2} \\ &= 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

である。よって、線分 AP の最大値は

$$\sqrt{3^2 + (6\sqrt{2})^2} = \sqrt{9 + 72} = 9$$

とわかる。また、このとき、点 P は直線 HB と $z = -2$ で切った球の断面 $(x-1)^2 + y^2 = 8$ との交

点である。直線 HB の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{4-0}{5-1}(x-1) \\ \Leftrightarrow y &= x-1 \end{aligned}$$

であるから、 $(x-1)^2 + y^2 = 8$ に代入して整理すると

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (x-1)^2 &= 8 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow x-1 &= \pm 2 \\ \therefore x &= -1, 3 \end{aligned}$$

となる。上図より、点 P の x 座標は負であるから、点 P の x 座標は -1 である。このとき、点 P の y 座標および z 座標は、

$$y = -1-1 = -2, z = -2$$

であるから、点 P の座標は $(-1, -2, -2)$ である。

(答) 線分 AP の最大値：9、 P の座標： $(-1, -2, -2)$