

(1)

題意より $S_{n+1} = (n+1) + 2a_{n+1}$ が成り立つから

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= (n+1) + 2a_{n+1} - (n + 2a_n) \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= 2a_{n+1} - 2a_n + 1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - 1 &= 2(a_n - 1) \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、数列 $\{a_n - 1\}$ は初項 $a_1 - 1$ 、公比 2 の等比数列である。ここで、 $S_n = n + 2a_n$ に $n=1$ を代入すると

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 + 2a_1 \\ \Leftrightarrow a_1 &= 1 + 2a_1 \\ \Leftrightarrow a_1 &= -1 \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} a_n - 1 &= (-1 - 1) \cdot 2^{n-1} \\ \therefore a_n &= -2^n + 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $a_n = -2^n + 1$

(2)

自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを、数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

①について、

$$(\text{左辺}) = \sum_{k=1}^1 k(k+1)(k+2)(k+3) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$(\text{右辺}) = \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

より、①は成り立つ。

[2] $n=l$ のとき

①が成り立つと仮定すると、仮定より、

$$\sum_{k=1}^l k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{1}{5}l(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)$$

が成り立つ。このとき、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{l+1} k(k+1)(k+2)(k+3) &= \sum_{k=1}^l k(k+1)(k+2)(k+3) + (l+1)(l+2)(l+3)(l+4) \\ &= \frac{1}{5}l(l+1)(l+2)(l+3)(l+4) + (l+1)(l+2)(l+3)(l+4) \\ &= \frac{1}{5}(l+5)(l+1)(l+2)(l+3)(l+4) \\ &= \frac{1}{5}(l+1)\{(l+1)+1\}\{(l+1)+2\}\{(l+1)+3\}\{(l+1)+4\} \end{aligned}$$

となり、 $n=l+1$ のときも①は成り立つ。

以上[1], [2]より、自然数 n に対して、①が成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

$f(x) = 4x^3 - 4x^2 + x - k$ とおく。この式を x で微分して整理すると

$$f'(x) = 12x^2 - 8x + 1 = (2x-1)(6x-1)$$

となる。よって、 $f(x)$ についての増減表は以下ようになる。

x	...	$\frac{1}{6}$	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$f(x)$ は連続であり、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

であるから、増減表より 3 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつ条件は

$$\left| f\left(\frac{1}{6}\right) > 0 \right| \text{ かつ } \left| f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{54} - \frac{1}{9} + \frac{1}{6} - k > 0 \right| \text{ かつ } \left| \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} - k < 0 \right|$$

$$\therefore 0 < k < \frac{2}{27}$$

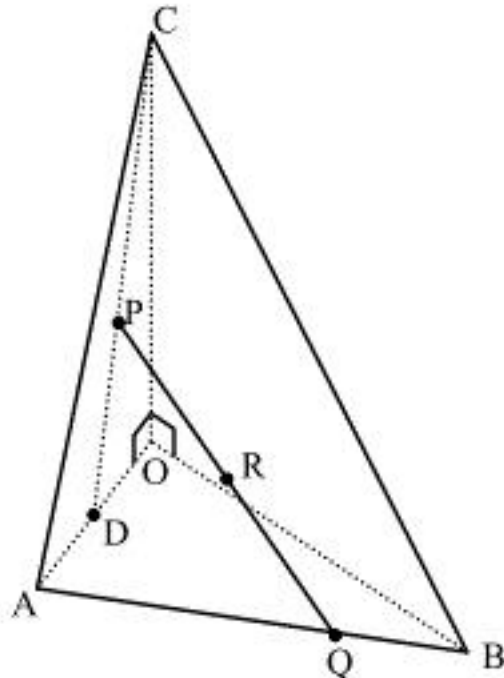
となる。以上より、求める定数 k の値の範囲は $0 < k < \frac{2}{27}$ である。

(答) $0 < k < \frac{2}{27}$

2

(1)

以下に、四面体OABCおよび点D, P, Q, Rを図示する。



題意より、

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OD} + (1-s)\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}s\vec{a} + (1-s)\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OQ} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}s\vec{a} + (1-s)\vec{c}\right\} + \frac{1}{2}\{t\vec{a} + (1-t)\vec{b}\} \\ &= \frac{1}{4}(s+2t)\vec{a} + \frac{1}{2}(1-t)\vec{b} + \frac{1}{2}(1-s)\vec{c}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OR} = \frac{1}{4}(s+2t)\vec{a} + \frac{1}{2}(1-t)\vec{b} + \frac{1}{2}(1-s)\vec{c}$$

(2)

(1)より

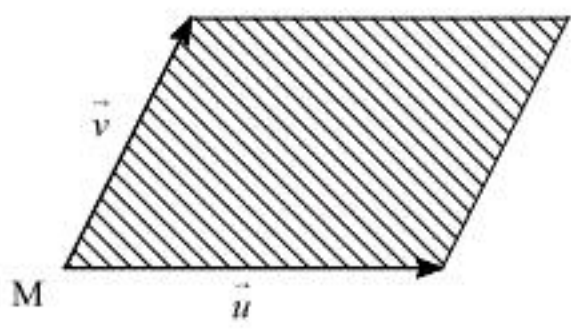
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \frac{1}{4}(s+2t)\vec{a} + \frac{1}{2}(1-t)\vec{b} + \frac{1}{2}(1-s)\vec{c} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) + s\left(\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}\right) + t\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) + s\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OD} - \frac{1}{2}\vec{c}\right) + t\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)\end{aligned}$$

と変形できる。辺BCの中点をMとおくと

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OM} + s \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + t \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

となる。 $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ とおくと、 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OM} + s\vec{u} + t\vec{v}$ と表せる。 $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ であ

るから、点Rは次図の平行四辺形の周上および内部を動く。



ここで、

$$\begin{aligned}|\vec{u}|^2 &= \frac{1}{4}|\overrightarrow{CD}|^2 = \frac{1}{4}\left|\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}\right|^2 = \frac{1}{16}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{4}|\vec{c}|^2 = \frac{1}{16} + \frac{5}{4} = \frac{21}{16} \\ |\vec{v}|^2 &= \frac{1}{4}|\overrightarrow{BA}|^2 = \frac{1}{4}|\vec{a} - \vec{b}|^2 = \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{4}{4} = \frac{3}{4} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}\right) \cdot \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{8}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{8}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{4}\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0\end{aligned}$$

であるから、求める面積は

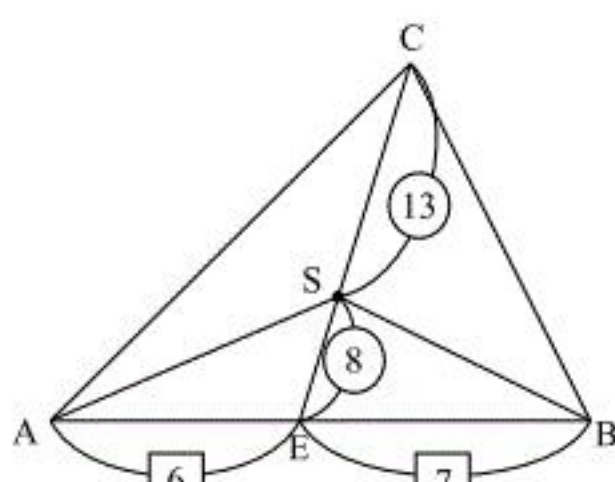
$$2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2} = \sqrt{\frac{21}{16} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

(3)

以下に、面ABCおよび点Sを図示する。



直線CSと辺ABの交点をEとおくと、 $\triangle SAC : \triangle SBC = 6 : 7$ であるから、 $AE : EB = 6 : 7$ となる。したがって、 $\triangle SAC : \triangle SAB = 6 : 8$ より、

$$CS : SE = \triangle SAC : \triangle SAE = \triangle SAC : \frac{6}{13} \triangle SAB = 6 : \frac{6}{13} \cdot 8 = 13 : 8$$

が得られる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AS} &= \frac{13}{21}\overrightarrow{AE} + \frac{8}{21}\overrightarrow{AC} = \frac{13}{21} \cdot \frac{6}{13}\overrightarrow{AB} + \frac{8}{21}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{8}{21}\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA} &= \frac{2}{7}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \frac{8}{21}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OS} &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{8}{21}\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。また、O, R, Sが一直線上にあるから、実数kを用いて

$$\overrightarrow{OR} = k\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}k\vec{a} + \frac{2}{7}k\vec{b} + \frac{8}{21}k\vec{c}$$

と表せる。ここで、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は同一平面上にないから、(1)の結果と比較して

$$\frac{1}{4}(s+2t)\vec{a} + \frac{1}{2}(1-t)\vec{b} + \frac{1}{2}(1-s)\vec{c} = \frac{1}{3}k\vec{a} + \frac{2}{7}k\vec{b} + \frac{8}{21}k\vec{c}$$

が得られる。 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は1次独立であるから、両辺を比較して

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(s+2t) = \frac{1}{3}k \\ \frac{1}{2}(1-t) = \frac{2}{7}k \\ \frac{1}{2}(1-s) = \frac{8}{21}k \end{cases}$$

が得られ、これらを連立して解くと

$$s = \frac{5}{17}, t = \frac{8}{17}, k = \frac{63}{68}$$

となる。よって、 $s = \frac{5}{17}, t = \frac{8}{17}$ である。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{5}{17}, t = \frac{8}{17}$$

(1)

表が出る確率は p であるから、裏が出る確率は $1-p$ である。 $n \geq 2$ のとき、 a_n は $n-1$ 回目まではすべて裏が出て、 n 回目で表が出る確率であるから、

$$a_n = (1-p)^{n-1} \cdot p = p(1-p)^{n-1}$$

である。また、 $a_1 = p$ であるから、これは $n=1$ のときも満たす。

$$(\text{答}) \quad a_n = p(1-p)^{n-1}$$

(2)

n 回の試行のうち1回以上表が出る確率は、 n 回すべてで裏が出る事象の余事象の確率であるから、

$$b_n = 1 - (1-p)^n$$

である。

$$(\text{答}) \quad b_n = 1 - (1-p)^n$$

(3)

$p = \frac{1}{50}$ のとき

$$b_n > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \left(1 - \frac{1}{50}\right)^n > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} > \left(\frac{49}{50}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} > \left(\frac{2 \cdot 49}{100}\right)^n$$

と変形できる。この不等式の両辺の常用対数をとると、

$$\log_{10} \frac{1}{2} > \log_{10} \left(\frac{2 \cdot 49}{100}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} 2^{-1} > \log_{10} \left(\frac{2 \cdot 7^2}{10^2}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow -\log_{10} 2 > n(\log_{10} 2 + 2\log_{10} 7 - 2)$$

と変形できる。ここで、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 7 = 0.8451$ を利用すると、

$$\begin{aligned} \log_{10} 2 + 2\log_{10} 7 - 2 &= 0.3010 + 2 \cdot 0.8451 - 2 \\ &= -0.0088 \end{aligned}$$

であるから、

$$-\log_{10} 2 > n(\log_{10} 2 + 2\log_{10} 7 - 2)$$

$$\Leftrightarrow -0.3010 > n \cdot (-0.0088)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{0.3010}{0.0088}$$

が得られる。いま、

$$34 < \frac{0.3010}{0.0088} < 35$$

であるから、求める最小の自然数 n の値は 35 である。

$$(\text{答}) \quad n = 35$$

(1)

$y = \sin x$ と $y = \sin(x - \theta)$ から y を消去して

$$\sin x = \sin(x - \theta)$$

$$\Leftrightarrow \text{「}x - \theta = x + 2n\pi\text{」 または 「}x - \theta = \pi - x + 2n\pi\text{」}$$

となる。ただし、 n は整数である。題意より $0 < \theta < \pi$ であるから

$$x = \frac{\theta + (2n+1)\pi}{2}$$

となる。

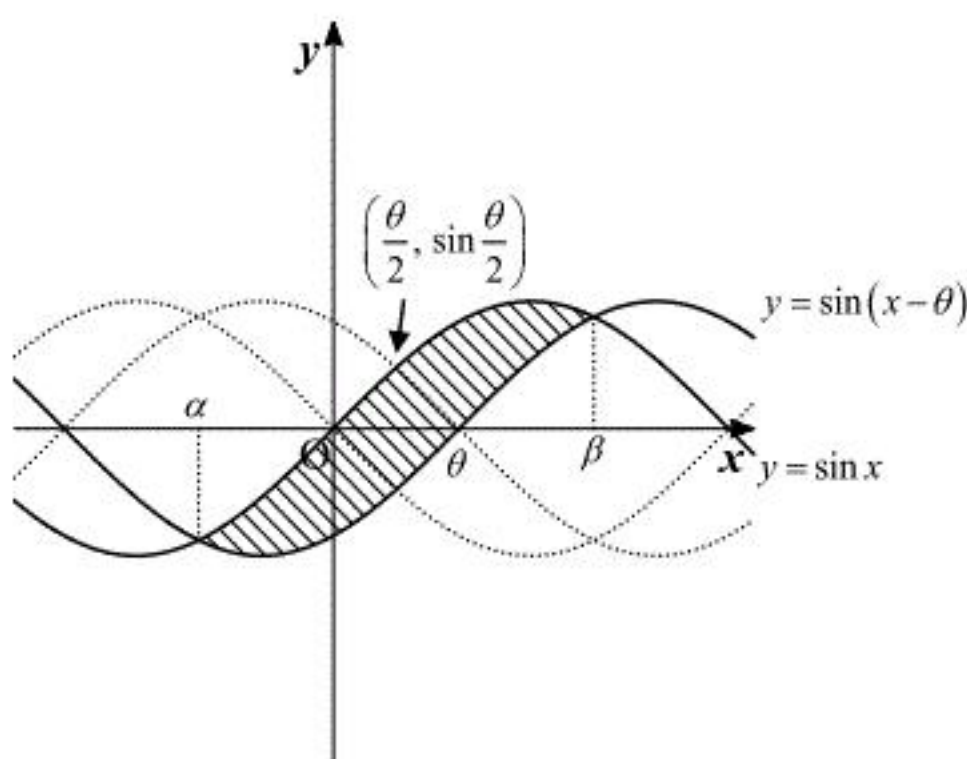
$$(\text{答}) \quad x = \frac{\theta + (2n+1)\pi}{2}$$

(2)

C_1, C_2 の交点の x 座標は(1)より整数 n に対して単調増加であるため、 $0 < \theta < \pi$ であることより

$$\alpha = \frac{\theta - \pi}{2}, \beta = \frac{\theta + \pi}{2}$$

である。 $\alpha \leq x \leq \beta$ の範囲における C_1, C_2 および、それらで囲まれた図形を図示すると以下のようになる。



C_1, C_2 で囲まれた図形である斜線部分は、三角関数の周期性、対称性より、 $y \leq 0$ の部分を x

軸に関して折り返してできる図形は、 $x = \frac{\theta}{2}$ に関して対称である。よって、求める体積は

$$\begin{aligned} V(\theta) &= 2 \left\{ \int_{\frac{\theta}{2}}^{\beta} \pi \sin^2 x \, dx - \int_{\theta}^{\beta} \pi \sin^2(x - \theta) \, dx \right\} \\ &= \pi \int_{\frac{\theta}{2}}^{\beta} (1 - \cos 2x) \, dx - \pi \int_{\theta}^{\beta} \{1 - \cos 2(x - \theta)\} \, dx \\ &= \pi \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\theta}{2}}^{\beta} - \pi \left[x - \frac{1}{2} \sin 2(x - \theta) \right]_{\theta}^{\beta} \\ &= \pi \left\{ \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin 2\beta + \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2(\beta - \theta) \right\} \\ &= \pi \left\{ \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin(\theta + \pi) + \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \sin(\pi - \theta) \right\} \\ &= \frac{\pi}{2} (\theta + 3 \sin \theta) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V(\theta) = \frac{\pi}{2} (\theta + 3 \sin \theta)$$

(3)

(2)で得られた体積を θ で微分すると

$$\frac{dV(\theta)}{d\theta} = \frac{\pi}{2} (1 + 3 \cos \theta)$$

である。 $\frac{dV(\theta)}{d\theta} = 0$ となるのは $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ のときであり、 $0 < \theta < \pi$ の範囲でこれを満たすよう

な θ はただ1つだけ存在するから、この θ の値を γ とおくと、 $0 < \theta < \pi$ における $V(\theta)$ の増減表は以下のようになる。

θ	0	...	γ	...	π
$\frac{dV(\theta)}{d\theta}$		+	0	-	
$V(\theta)$		↗	極大	↘	

増減表より、 $V(\theta)$ は $\theta = \gamma$ のときに最大となる。したがって、

$$\cos \theta_0 = \cos \gamma = -\frac{1}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \cos \theta_0 = -\frac{1}{3}$$