

(1)

すべての球を区別すると、袋Aから2個の球を取り出すとき、組み合わせの総数は

$${}_{n+7}C_2 = \frac{(n+7)(n+6)}{2} \quad (\text{通り})$$

であり、これらは同様に確からしい。 p_n は袋Aから、赤球と白球を1球ずつ取り出す確率であるから

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{{}_7C_1 \cdot {}_n C_1}{{}_{n+7}C_2} \\ &= 7 \cdot n \cdot \frac{2}{(n+7)(n+6)} \\ &= \frac{14n}{(n+7)(n+6)} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{14n}{(n+7)(n+6)}$$

(2)

p_n と p_{n+1} の比は、

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1}}{p_n} &= \frac{14(n+1)}{(n+8)(n+7)} \cdot \frac{(n+7)(n+6)}{14n} \\ &= \frac{(n+1)(n+6)}{n(n+8)} \\ &= 1 + \frac{6-n}{n^2+8n} \end{aligned}$$

である。ここで、任意の自然数 n について

$$n^2+8n>0$$

が成り立つから、

$$\begin{cases} \frac{p_{n+1}}{p_n} > 1 & (n=1, 2, 3, 4, 5) \\ \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1 & (n=6) \\ \frac{p_{n+1}}{p_n} < 1 & (n>6) \end{cases}$$

となる。これより、 $p_n > 0$ であることに注意すると、

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_6 = p_7 > p_8 > \cdots$$

である。したがって、 p_n が最大値をとる n は

$$n=6, 7$$

であり、このときの p_n は(1)で求めた式に $n=6$ または $n=7$ を代入して

$$p_6 = p_7 = \frac{14 \cdot 7}{(7+7) \cdot (7+6)} = \frac{7}{13}$$

である。

$$(\text{答}) \quad n=6, 7, p_6 = p_7 = \frac{7}{13}$$

(3)

袋Bから色が異なる2色の球が取り出されるとき、袋Aからは赤球が2個取り出される場合と赤球と白球が1個ずつ取り出される場合が存在する。以下、袋Aから取り出される球の種類によって場合分けを行う。

[1] 袋Aから赤球が2個取り出されるとき

袋Aから赤球が2個取り出される確率は $\frac{{}_7C_2}{{}_{n+7}C_2}$ であり、このとき袋Bには2個の赤球が

入る。袋Bから色の異なる2個の球が取り出される確率は $\frac{{}_2C_1 \cdot {}_5C_1}{{}_7C_2}$ であるから、この確

率は

$$\frac{{}_7C_2}{{}_{n+7}C_2} \cdot \frac{{}_2C_1 \cdot {}_5C_1}{{}_7C_2}$$

である。

[2] 袋Aから赤球と白球が1個ずつ取り出されるとき

(1)より、袋Aから赤球と白球が1個ずつ取り出される確率は $\frac{{}_7C_1 \cdot {}_n C_1}{{}_{n+7}C_2}$ であり、このとき

袋Bには赤球と白球が1個ずつ入る。袋Bから色の異なる2個の球が取り出される確率

は $\frac{{}_1C_1 \cdot {}_6C_1}{{}_7C_2}$ であるから、この確率は

$$\frac{{}_7C_1 \cdot {}_n C_1}{{}_{n+7}C_2} \cdot \frac{{}_1C_1 \cdot {}_6C_1}{{}_7C_2}$$

である。

以上[1], [2]より、これら2つの事象は互いに排反であるから、求める確率 q_n は

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{{}_7C_2}{{}_{n+7}C_2} \cdot \frac{{}_2C_1 \cdot {}_5C_1}{{}_7C_2} + \frac{{}_7C_1 \cdot {}_n C_1}{{}_{n+7}C_2} \cdot \frac{{}_1C_1 \cdot {}_6C_1}{{}_7C_2} \\ &= \frac{1}{{}_{n+7}C_2} \left(2 \cdot 5 + 7 \cdot n \cdot \frac{2}{7} \right) \\ &= \frac{2}{(n+7)(n+6)} (10+2n) \\ &= \frac{4n+20}{(n+7)(n+6)} \end{aligned}$$

であり、題意は示された。

(証明終)

(1)

条件より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{2}{3}\vec{a} \\ \overrightarrow{OQ} &= \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

が成立するから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OQ} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) \\ &= \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}\end{aligned}$$

と表される。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OR} = \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}$$

(2)

点 O, R, S は 1 直線上にあるから、実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} &= k\overrightarrow{OR} \\ &= \frac{4}{9}k\vec{a} + \frac{1}{9}k\vec{b} + \frac{2}{9}k\vec{c}\end{aligned}$$

と表される。ここで、点 S は平面 ABC 上にあるから、各係数の和は 1 に等しく

$$\begin{aligned}\frac{4}{9}k + \frac{1}{9}k + \frac{2}{9}k &= 1 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{9}{7}\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\overrightarrow{OS} = \frac{9}{7}\overrightarrow{OR}$$

であるから

$$OR : OS = 7 : 9$$

である。

$$(\text{答}) \quad OR : OS = 7 : 9$$

(3)

(1)より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{2}{9}(2\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c})\end{aligned}$$

である。 $OA = OB = OC = l (> 0)$ とおくと、 $\overrightarrow{BR}$ と平面 OAC 上のベクトル $\overrightarrow{OA}$ は垂直だから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BR} \cdot \overrightarrow{OA} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{9}(2\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{a} &= 2l^2 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となり、同じく平面 OAC 上のベクトル $\overrightarrow{OQ}$ についても

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BR} \cdot \overrightarrow{OQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{27}(2\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} + 2\vec{c}) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{c} \cdot \vec{a} = 4|\vec{b}|^2 - 2|\vec{c}|^2 + 7\vec{b} \cdot \vec{c} \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{c} \cdot \vec{a} &= l^2 \quad (\because \vec{b} \cdot \vec{c} = 0) \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となるから、①、②より、

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{5}{9}l^2 \\ \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{2}{9}l^2 \end{cases}$$

が得られる。以上より

$$\begin{aligned}\cos \angle AOB &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{5}{9} \\ \cos \angle AOC &= \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{c}||\vec{a}|} = \frac{2}{9}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \cos \angle AOB = \frac{5}{9}, \cos \angle AOC = \frac{2}{9}$$

(1)

 b_n について

$$b_1 = 3, b_2 = 4, b_3 = 2, b_4 = 1, b_5 = 3$$

となる。ここで

$$3^{n+4} - 3^n = 3^n(3^4 - 1) = 2^4 \cdot 3^n \cdot 5$$

であるから、 $3^{n+4} - 3^n$ は5の倍数であり、 3^n と 3^{n+4} は5で割ったときの余りが一致する。すなわち、 $b_n = b_{n+4}$ である。したがって、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{100} b_n &= 25(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) \\ &= 25 \cdot (3 + 4 + 2 + 1) \\ &= 250 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sum_{n=1}^{100} b_n = 250$$

(2)

条件より

$$\begin{aligned} 3^n &= 5 \cdot a_n + b_n \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{3^n - b_n}{5} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{3^n - b_n}{5}$$

(3)

(1), (2)より,

$$\sum_{n=1}^{100} a_n = \sum_{n=1}^{100} \frac{3 \cdot 3^{n-1} - b_n}{5} = \frac{1}{5} \left\{ \frac{3(3^{100} - 1)}{3 - 1} - 250 \right\} = \frac{1}{10} (3^{101} - 503)$$

であり、 $\sum_{n=1}^{100} a_n$ は整数であるから、 $3^{101} - 503$ は10の倍数である。ここで、

$$3^{101} - 503 = 3(3^{100} - 171) + 10$$

であり、3と10は互いに素であるから $3^{100} - 171$ も10の倍数である。以上より、ある整数 k を用いて $3^{100} - 171 = 10k$ と表すと、

$$\sum_{n=1}^{100} a_n = \frac{1}{10} (3 \cdot 10k + 10) = 3k + 1$$

であるから、 $\sum_{n=1}^{100} a_n$ を3で割った余りは1である。

(答) 1

(1)

 $f(x)$ について

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 3kx^2 + (3k^2 - 3)x \\ &= x(x^2 + 3kx + 3k^2 - 3) \end{aligned}$$

となるから、 $x^2 + 3kx + 3k^2 - 3 = 0$ の 2 解が α, β ($\alpha < \beta$) である。よって、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -3k \\ \alpha\beta = 3k^2 - 3 \end{cases}$$

である。

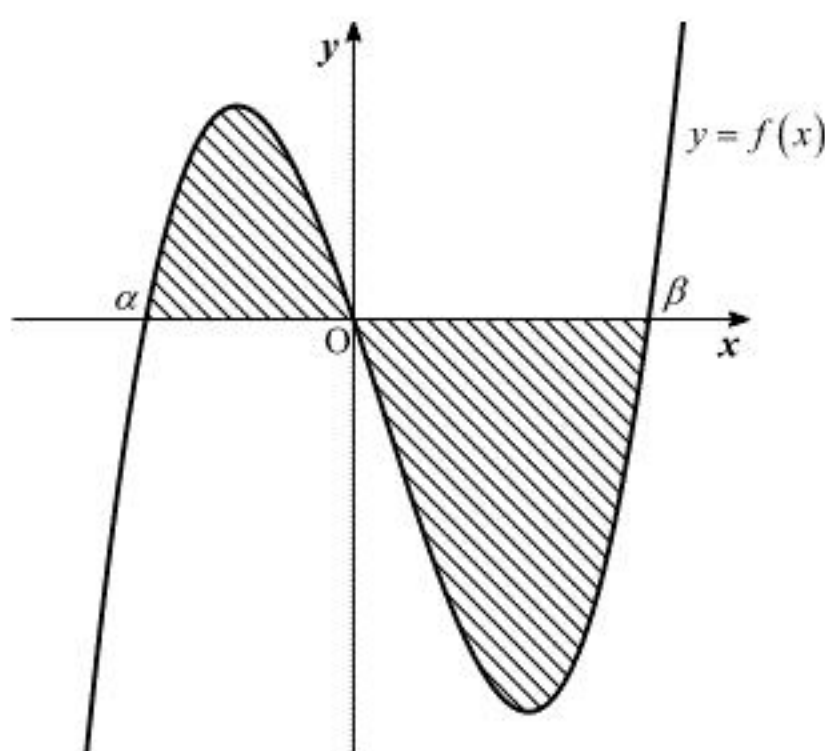
$$(\text{答}) \quad \alpha + \beta = -3k, \alpha\beta = 3k^2 - 3$$

(2)

(1)より $f(x) = x(x - \alpha)(x - \beta)$ である。また、 $-1 < k < 1$ より $\alpha\beta < 0$ であるから、方程式 $f(x) = 0$ の 3 つの解の大小関係は

$$\alpha < 0 < \beta$$

となる。以下に、 C と x 軸で囲まれた部分を斜線部で図示する。



上図より、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^0 f(x) dx + \int_0^{\beta} \{-f(x)\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + kx^3 + \frac{3k^2 - 3}{2}x^2 \right]_{\alpha}^0 - \left[\frac{1}{4}x^4 + kx^3 + \frac{3k^2 - 3}{2}x^2 \right]_0^{\beta} \\ &= -\frac{1}{4}(\alpha^4 + \beta^4) - k(\alpha^3 + \beta^3) - \frac{3k^2 - 3}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と表される。ここで、(1)より

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (-3k)^2 - 2(3k^2 - 3) \\ &= 3k^2 + 6 \\ \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)\{(\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta\} \\ &= (-3k)\{(-3k)^2 - 3(3k^2 - 3)\} \\ &= -27k \\ \alpha^4 + \beta^4 &= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 \\ &= (3k^2 + 6)^2 - 2(3k^2 - 3)^2 \\ &= -9k^4 + 72k^2 + 18 \end{aligned}$$

であるから、①にそれぞれ代入して

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4}(-9k^4 + 72k^2 + 18) - k(-27k) - \frac{3k^2 - 3}{2}(3k^2 + 6) \\ &= -\frac{9}{4}k^4 + \frac{9}{2}k^2 + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = -\frac{9}{4}k^4 + \frac{9}{2}k^2 + \frac{9}{2}$$

(3)

(2)より、 S は

$$S = -\frac{9}{4}(k^2 - 1)^2 + \frac{27}{4}$$

と変形できる。 $-1 < k < 1$ より $0 \leq k^2 < 1$ であるから、 S は $k = 0$ のとき最小値 $\frac{9}{2}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値} : \frac{9}{2} (k = 0)$$

(1)

 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = x^n \sin 2x$$

であり、 $0 \leq x \leq \pi$ の範囲において、

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^n \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$$

であるから、増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$f'(x)$	0	+	0	-	0
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

上表より、 $f(x)$ は $x = \frac{\pi}{2}$ のときに最大となる。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{\pi}{2}$$

(2)

(1)より $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin 2t \, dt$, $I_{n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-2} \sin 2t \, dt$ であるから、部分積分法を用いると、

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin 2t \, dt \\ &= \left[t^n \left(-\frac{1}{2} \cos 2t \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} n t^{n-1} \left(-\frac{1}{2} \cos 2t \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^n - \left[n t^{n-1} \left(-\frac{1}{4} \sin 2t \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} n(n-1) t^{n-2} \left(-\frac{1}{4} \sin 2t \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^n - \frac{n(n-1)}{4} I_{n-2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^n - \frac{n(n-1)}{4} I_{n-2}$$

(3)

 I_0 について

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \, dt = \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

であるから、(2)より

$$I_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \frac{2 \cdot 1}{4} I_0 = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$$

$$I_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 - \frac{4 \cdot 3}{4} I_2 = \frac{\pi^4}{32} - \frac{3}{8} \pi^2 + \frac{3}{2}$$

となる。また、 I_1 について部分積分法を用いると

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin 2t \, dt \\ &= \left[t \left(-\frac{1}{2} \cos 2t \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t \, dt \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

であるから、同様にして

$$I_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 - \frac{3 \cdot 2}{4} I_1 = \frac{\pi^3}{16} - \frac{3}{8} \pi$$

$$I_5 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^5 - \frac{5 \cdot 4}{4} I_3 = \frac{\pi^5}{64} - \frac{5}{16} \pi^3 + \frac{15}{8} \pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I_4 = \frac{\pi^4}{32} - \frac{3}{8} \pi^2 + \frac{3}{2}, \quad I_5 = \frac{\pi^5}{64} - \frac{5}{16} \pi^3 + \frac{15}{8} \pi$$

(1)

 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は、

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

であり、

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1, 3$$

であるから、増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	9	$\searrow$	5	$\nearrow$

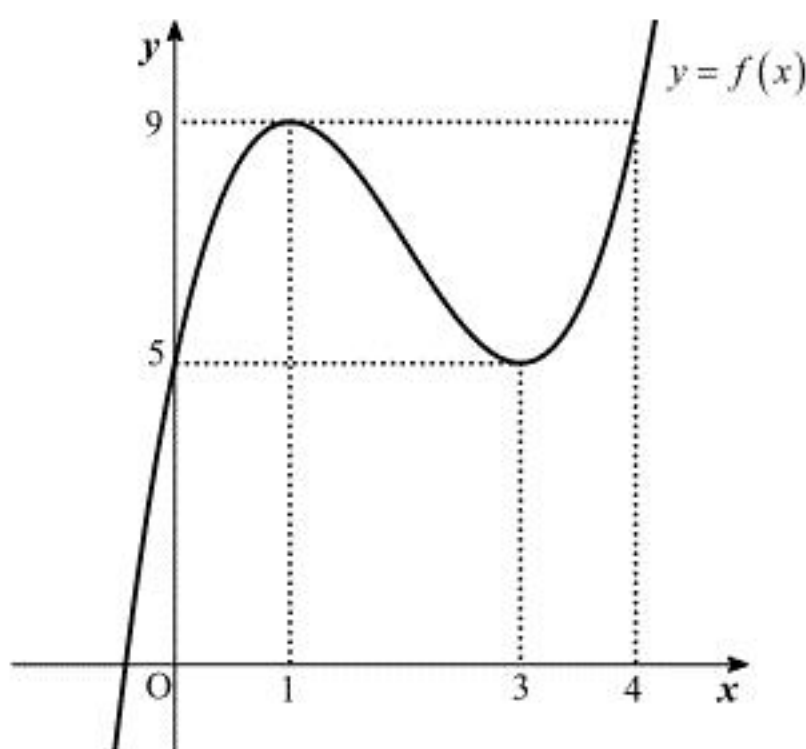
また、

$$f(x) = 9$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1, 4$$

となるから、 $y = f(x)$ のグラフは下図のようになる。上図より、 $f(x)$ の区間 $0 \leq x \leq a$ における最大値が 9 となる正の定数 a の値の範囲は

$$1 \leq a \leq 4$$

である。

(答) $1 \leq a \leq 4$

(2)

 C_1 と C_2 の交点の x 座標は、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ から y を消去して、

$$f(x) - g(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$$

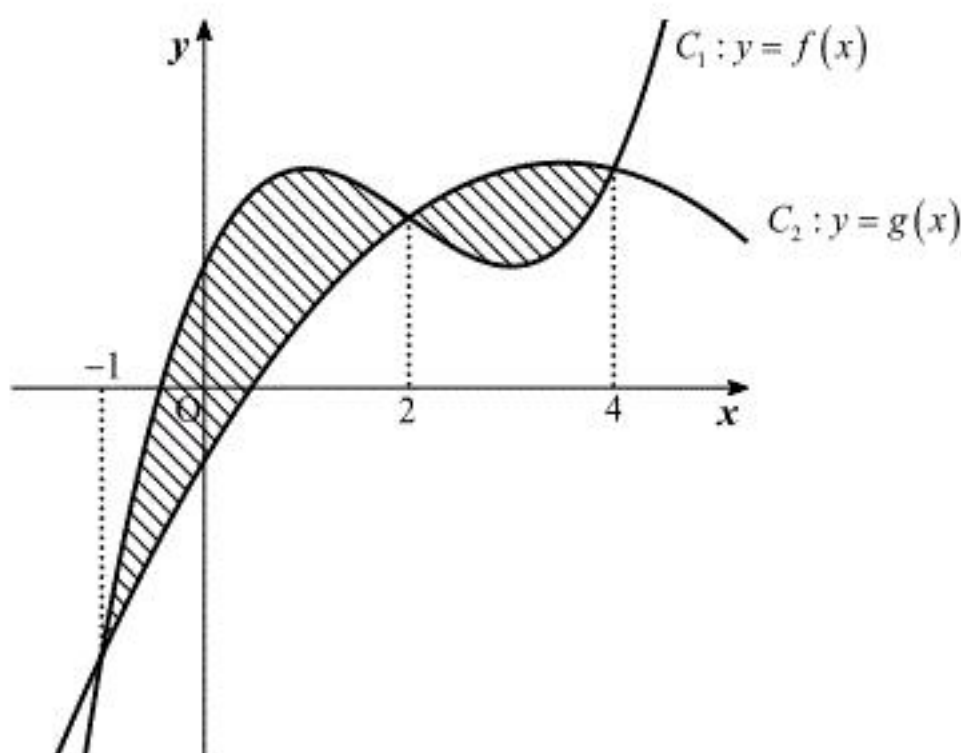
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1, 2, 4$$

と求まる。

(答) $x = -1, 2, 4$

(3)

以下に、 C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を斜線部で図示する。

上図より、求める面積は

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^2 \{f(x) - g(x)\} dx + \int_2^4 \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_{-1}^2 (x^3 - 5x^2 + 2x + 8) dx + \int_2^4 (-x^3 + 5x^2 - 2x - 8) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + x^2 + 8x \right]_{-1}^2 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - x^2 - 8x \right]_2^4 \\ &= \frac{253}{12} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{253}{12}$