

1

(1)

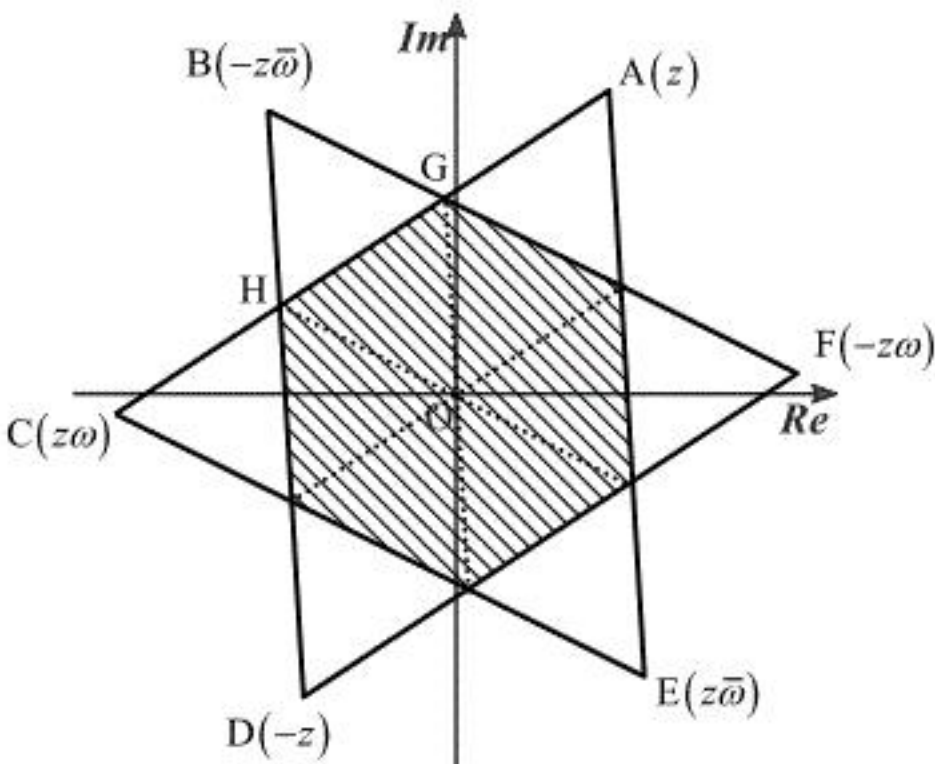
いま、

$$\begin{aligned} x^3 &= 1 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

であるから、 $\omega$  は

$$\omega = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \cos\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right) \quad (\text{複号同順})$$

のいずれかで表せる。以下に、 $\omega = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$  のときの三角形 ACE と三角形 BDF の共通部分を斜線部で示す。なお、線分 AC と線分 BD, BF の交点をそれぞれ G, H とする。



上図より、 $\omega = \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$  のとき、 $\omega$  と  $\bar{\omega}$  が入れ替わり各点の並び方が時計回りになるだけであるから、 $\omega = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$  の場合のみを考えればよい。ここで、図形の対称性より、 $AG:GH:HC=1:1:1$  が成り立ち、共通部分の面積は三角形 BGH の面積の 6 倍、すなわち三角形 ACE の面積の  $\frac{2}{3}$  であることがわかる。ここで、 $z=1+2i$  より

$$AC = \sqrt{3}OA = \sqrt{3}|z| = \sqrt{3}\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{15}$$

であるから、求める面積は

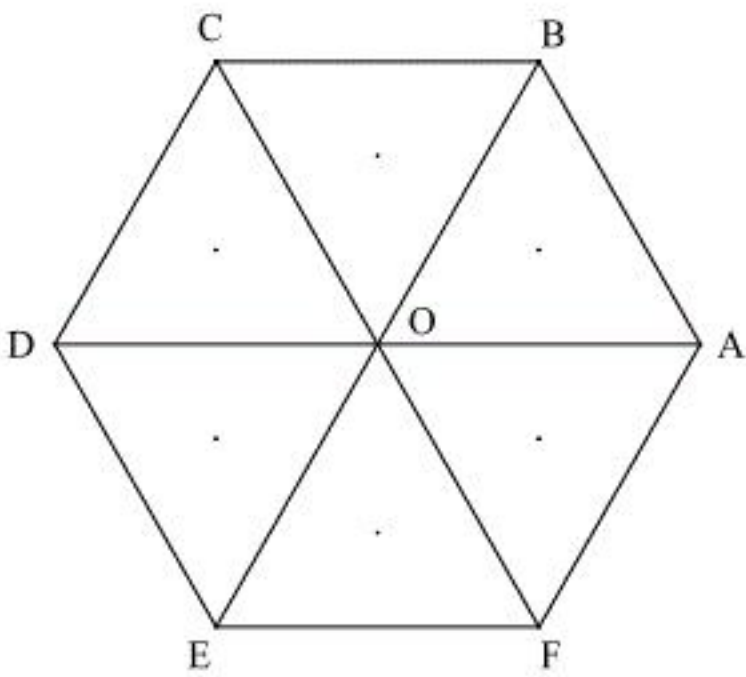
$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AC^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{15}^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{5}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

(答)  $\frac{5}{2}\sqrt{3}$

(2)①

以下に、六角形 ABCDEF および点 O を図示する。



$p_0=1$  であり、1 秒後に点 P は必ず頂点 A, B, C, D, E, F のいずれかにある。A, B, C, D, E, F の各点から点 O へ移動する確率はそれぞれ  $\frac{1}{3}$  であるから、 $p_2$  は

$$p_2 = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

となる。また、2 秒後に点 P が点 O にいない確率は  $1-p_2$  であるから、 $p_3$  は

$$p_3 = (1-p_2) \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

である。

(答)  $p_2 = \frac{1}{3}, p_3 = \frac{2}{9}$

②

点 P が  $n+1$  秒後に点 O にいるのは、 $n$  秒後に O 以外の頂点にいて、そこから O に移動する場合であるから、

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{3}(1-p_n) \\ \Leftrightarrow p_{n+1} - \frac{1}{4} &= -\frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、数列  $\left\{p_n - \frac{1}{4}\right\}$  は初項  $p_1 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ 、公比  $-\frac{1}{3}$  の等比数列であるから、

$$\begin{aligned} \therefore p_n - \frac{1}{4} &= -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow p_n &= \frac{1}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} \end{aligned}$$

となる。

(答)  $p_n = \frac{1}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

(1)

与式に  $y=0$  を代入すると、

$$\begin{aligned} |f(x)-f(0)| &= |x| \\ \Leftrightarrow f(x)-f(0) &= \pm x \\ \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=x+f(0) \\ f(x)=-x+f(0) \end{cases} \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\text{「すべての実数 } x \text{ に対して、 } f(x)=x+f(0)\text{」} \quad \cdots \textcircled{1}$$

または

$$\text{「すべての実数 } x \text{ に対して、 } f(x)=-x+f(0)\text{」} \quad \cdots \textcircled{2}$$

のどちらか一方のみが成立することを背理法で示す。ここで、任意の実数  $a, b$  に対して、

$$f(a)=a+f(0), f(b)=-b+f(0)$$

を同時に満たすと仮定する。辺々引くと、

$$f(a)-f(b)=a+b$$

となり、また与式より

$$f(a)-f(b)=\pm(a-b)$$

である。

[1]  $a+b=a-b$  のとき

$b=0$  となり、これは  $b$  が任意の実数であることに矛盾する。

[2]  $a+b=-a+b$  のとき

$a=0$  となり、これは  $a$  が任意の実数であることに矛盾する。

以上, [1], [2] より, ①または②のどちらか一方しか成り立たないことが示された。ここで, ①と②の条件で場合分けをする。

[i] ①のとき

$x$  が整数のとき  $f(x)$  も整数であるから  $f(0)$  は整数であり,  $f(x)$  はどの値も固定しないから  $f(0) \neq 0$  である。よって,  $f(0)=n$  とおくと、

$$f(x)=x+n \quad (n \text{ は } 0 \text{ 以外の整数})$$

と表せる。

[ii] ②のとき

$$x=\frac{1}{2}f(0) \text{ とすると、}$$

$$f\left(\frac{1}{2}f(0)\right)=\frac{1}{2}f(0)$$

であるから,  $f(x)$  は  $\frac{1}{2}f(0)$  を固定する。したがって, この場合は条件を満たさない。

以上, [i], [ii] より,  $f(x)$  がどの値も固定しないとき

$$f(x)=x+n \quad (n \text{ は } 0 \text{ 以外の整数})$$

と表せる。このとき  $f(x)$  は確かに題意の条件を満たす。

(証明終)

(2)

(1)の結果を用いて場合分けをする。

[1] ①のとき

(1)より,  $f(x)$  は  $f(0) \neq 0$  のときどの値も固定せず,  $f(0)=0$  のときすべての値を固定する。したがって, この場合は条件を満たさない。

[2] ②のとき

$f(x_0)=x_0$  より,  $x=x_0$  を代入すると、

$$\begin{aligned} x_0 &= -x_0 + f(0) \\ \Leftrightarrow x_0 &= \frac{1}{2}f(0) \end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2] より

$$x_0 = \frac{1}{2}f(0)$$

である。このとき  $f(x)$  は確かに題意の条件を満たす。

$$\text{(答)} \quad x_0 = \frac{1}{2}f(0)$$

(3)

(2)より,  $f(x)$  が2点以上の点を固定するのは, ①において  $f(0)=0$  のときのみであるから

$$f(x)=x$$

が任意の実数  $x$  に対して成立する。このとき  $f(x)$  は確かに題意の条件を満たす。

(証明終)

(1)①

与式の両辺を  $x$  について微分すると

$$\begin{aligned} f(x) + (x+1)f'(x) &= f(x) + \frac{2}{x+1} + 1 \\ \Leftrightarrow f'(x) &= \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

となるから、積分定数を  $C$  として

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \left\{ \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} \right\} dx \\ &= -\frac{2}{x+1} + \log(x+1) + C \end{aligned}$$

となる。また、与式に  $x=0$  を代入すると

$$\begin{aligned} f(0) &= -2 \\ \Leftrightarrow -2 + C &= -2 \\ \therefore C &= 0 \end{aligned}$$

であるから、

$$f(x) = -\frac{2}{x+1} + \log(x+1)$$

である。

$$(\text{答}) \quad f(x) = -\frac{2}{x+1} + \log(x+1)$$

(2)

①より、开区間  $(0, e)$  において

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} > 0$$

であるから、 $f(x)$  はこの区間で単調増加である。また、

$$\begin{aligned} f(0) &= -2 < 0 \\ f(e) &= -\frac{2}{e+1} + \log(e+1) > -1 + \log e = 0 \end{aligned}$$

であるから、中間値の定理より、方程式  $f(x) = 0$  は开区間  $(0, e)$  に実数解をただ1つもつ。

(証明終)

(2)①

(1)より

$$h(x) = f(x) + \frac{2}{x+1} = \log(x+1) \quad (x > -1)$$

であるから、逆関数  $g(x)$  は

$$\begin{aligned} x &= \log\{g(x)+1\} \\ \Leftrightarrow g(x)+1 &= e^x \\ \Leftrightarrow g(x) &= e^x - 1 \end{aligned}$$

である。ただし、 $x$  はすべての実数をとる。

$$(\text{答}) \quad g(x) = e^x - 1$$

(2)②

$-x \sin(-nx) = x \sin nx$  より  $x \sin nx$  は偶関数である。ゆえに(2)①より

$$\begin{aligned} P(n) &= g\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx \\ &= \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \cdot \frac{n^2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \\ &= \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \cdot \frac{n^2}{\pi} \left( \left[ -\frac{x}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \cos nx \, dx \right) \\ &= \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \cdot \frac{n^2}{\pi} \left( \left\{ -(-1)^n \cdot \frac{\pi}{n} \right\} + \left[ \frac{1}{n^2} \sin nx \right]_0^{\pi} \right) \\ &= n \left( e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |P(n)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

(答) 1