

(1)

与式より

$$a_2 = \frac{a_1}{2a_1+1} = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{4a_2+1} = \frac{1}{7}$$

であるから、

$$\frac{1}{a_2} = 3$$

$$\frac{1}{a_3} = 7$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{a_2} = 3, \frac{1}{a_3} = 7$$

(2)

 $a_n > 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$)であることを、数学的帰納法を用いて証明する。[1] $n=1$ のとき $a_1 = 1 > 0$ であり、成立する。[2] $n=k$ で $a_k > 0$ が成立すると仮定したとき $n=k+1$ のとき

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{2ka_k+1} > 0$$

となり、 $n=k+1$ のときも成立する。

以上[1], [2]より、数学的帰納法によって

$$a_n > 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

であることが示された。

(証明終)

(3)

(2)より $a_n \neq 0$ であるから、与式の両辺の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 2n + \frac{1}{a_n} \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2n$$

となる。よって、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n} &= \frac{1}{a_1} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{1}{1} + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} \\ &= n^2 - n + 1 \end{aligned}$$

となり、これは $n=1$ のときにも成立する。よって、一般項 a_n は

$$a_n = \frac{1}{n^2 - n + 1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{1}{n^2 - n + 1}$$

(1)

$P(m)$ はコインを 10 回続けて投げるとき、表が m 回、裏が $(10-m)$ 回出る確率で、表と裏がどのような順番で出るかは ${}_{10}C_m$ 通りであるから、

$$P(m) = {}_{10}C_m p^m (1-p)^{10-m} \quad (0 \leq m \leq 10, m \text{ は整数})$$

である。

$$(\text{答}) \quad P(m) = {}_{10}C_m p^m (1-p)^{10-m}$$

(2)

(1)より、 $Q(m)$ は $0 \leq m \leq 9$ において

$$\begin{aligned} Q(m) &= \frac{P(m+1)}{P(m)} \\ &= \frac{{}_{10}C_{m+1} p^{m+1} (1-p)^{9-m}}{{}_{10}C_m p^m (1-p)^{10-m}} \\ &= \frac{10!}{(m+1)!(9-m)!} \cdot \frac{p}{1-p} \\ &= \frac{10!}{m!(10-m)!} \cdot \frac{p}{1-p} \\ &= \frac{10-m}{m+1} \cdot \frac{p}{1-p} \end{aligned}$$

と表される。ここで、 $0 \leq m \leq 8$ において

$$\begin{aligned} Q(m) - Q(m+1) &= \left(\frac{10-m}{m+1} - \frac{9-m}{m+2} \right) \cdot \frac{p}{1-p} \\ &= \frac{11}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{p}{1-p} \\ &> 0 \end{aligned}$$

となるから、

$$Q(m+1) < Q(m) \quad (0 \leq m \leq 8)$$

であることが証明された。

(証明終)

(3)

まず $P(m) \leq P(3)$ であるとき、「 $P(2) \leq P(3)$ 」かつ「 $P(3) \geq P(4)$ 」であることが必要である。すなわち、「 $Q(2) \geq 1$ 」かつ「 $Q(3) \leq 1$ 」であることが必要条件となっている。このとき、(2)より

$$Q(0) > Q(1) > Q(2) \geq 1 \geq Q(3) > Q(4) > \cdots > Q(9)$$

であるから

$$\frac{P(1)}{P(0)} > \frac{P(2)}{P(1)} > \frac{P(3)}{P(2)} \geq 1 \geq \frac{P(4)}{P(3)} < \frac{P(5)}{P(4)} < \cdots < \frac{P(10)}{P(9)}$$

となる。したがって

$$P(0) < P(1) < P(2) \leq P(3) \geq P(4) > P(5) > \cdots > P(9) > P(10)$$

となるから、「 $Q(2) \geq 1$ 」かつ「 $Q(3) \leq 1$ 」が成り立つことが $P(m) \leq P(3)$ の必要十分条件であることがわかる。以上より、求める条件は

$$\text{「} Q(2) \geq 1 \text{」かつ「} Q(3) \leq 1 \text{」}$$

$$\Leftrightarrow \text{「} \frac{8}{3} \cdot \frac{p}{1-p} \geq 1 \text{」かつ「} \frac{7}{4} \cdot \frac{p}{1-p} \leq 1 \text{」}$$

$$\Leftrightarrow \text{「} 8p \geq 3-3p \text{」かつ「} 7p \leq 4-4p \text{」}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{11} \leq p \leq \frac{4}{11}$$

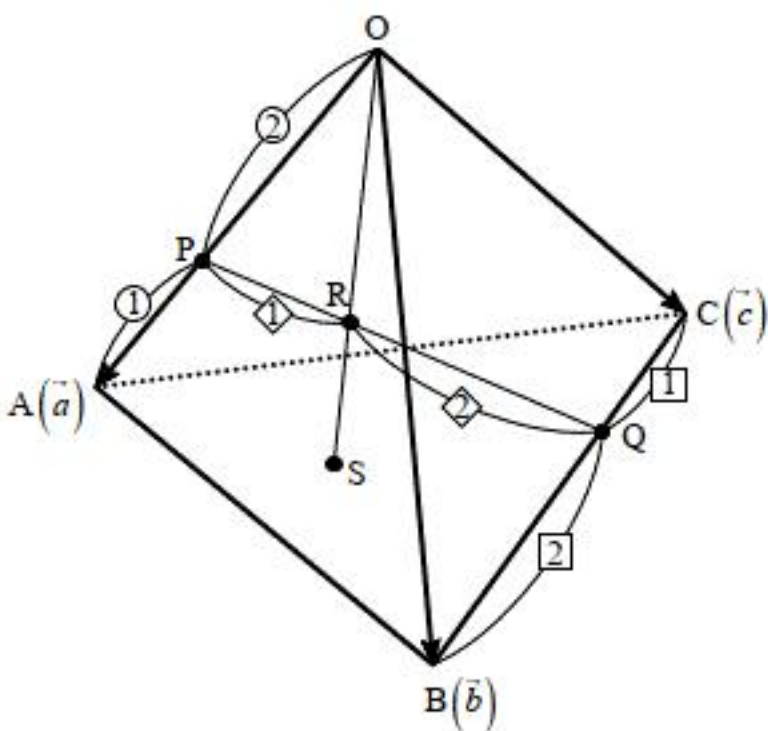
である。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{11} \leq p \leq \frac{4}{11}$$

3

(1)

以下に、四面体 OABC および点 P, Q, R, S を図示する。



上図より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{2}{3}\vec{a} \\ \overrightarrow{OQ} &= \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OQ} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} \right) \\ &= \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}\end{aligned}$$

と表される。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OR} = \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}$$

(2)

点 O, R, S は同一直線上にあるから、実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} &= k\overrightarrow{OR} \\ &= \frac{4}{9}k\vec{a} + \frac{1}{9}k\vec{b} + \frac{2}{9}k\vec{c}\end{aligned}$$

と表される。ここで、点 S は平面 ABC 上にあるから、各係数の和は 1 に等しく

$$\begin{aligned}\frac{4}{9}k + \frac{1}{9}k + \frac{2}{9}k &= 1 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{9}{7}\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\overrightarrow{OS} = \frac{9}{7}\overrightarrow{OR}$$

であるから

$$OR : OS = 7 : 9$$

である。

$$(\text{答}) \quad OR : OS = 7 : 9$$

(3)

(1)より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{2}{9}(2\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c})\end{aligned}$$

である。ここで、ベクトル $\overrightarrow{BR}$ と平面 OAQ 上のベクトル $\overrightarrow{OA}$ は垂直に交わるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BR} \cdot \overrightarrow{OA} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{9}(2\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{a} &= 2|\vec{a}|^2 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。同様に、平面 OAQ 上のベクトル $\overrightarrow{OQ}$ について、 $\angle BOC = 90^\circ$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BR} \cdot \overrightarrow{OQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{27}(2\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} + 2\vec{c}) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{c} \cdot \vec{a} &= 4|\vec{b}|^2 - 2|\vec{c}|^2 + 7\vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{c} \cdot \vec{a} &= 2|\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2 \quad (\because \vec{b} \cdot \vec{c} = 0) \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。条件より $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ とおけるから、①、②より、

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{5}{9} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{2}{9} \end{cases}$$

が得られる。以上より

$$\begin{aligned}\cos \angle AOB &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{5}{9} \\ \cos \angle AOC &= \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{c}||\vec{a}|} = \frac{2}{9}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \cos \angle AOB = \frac{5}{9}, \cos \angle AOC = \frac{2}{9}$$

(1)

導関数 $f'(x)$ は、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sin 2x \cdot (2x)' - (-x) \sin(-x) \cdot (-x)' \\ &= 4x \sin 2x + x \sin x \end{aligned}$$

と表される。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = 4x \sin 2x + x \sin x$$

(2)

(1)から、倍角の公式より、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x \sin 2x + x \sin x \\ &= 8x \sin x \cos x + x \sin x \\ &= x \sin x (8 \cos x + 1) \end{aligned}$$

と表せる。ここで、 $8 \cos x + 1 = 0$ を満たす x を k とすると、このような k は $0 \leq x \leq \pi$ においてただ1つのみ存在する。したがって、増減表は以下のようなになる。

x	0	...	k	...	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

以上より、 $f(x)$ は $x=k$ で最大となることがわかるから、 k と α は一致し、

$$\cos \alpha = -\frac{1}{8}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \cos \alpha = -\frac{1}{8}$$

(3)

(2)における増減表より、最小値は $x=0$ または $x=\pi$ のときにとりうることがわかる。ここで、

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_0^0 t \sin t dt = 0 \\ f(\pi) &= \int_{-\pi}^{2\pi} t \sin t dt \\ &= [-t \cos t]_{-\pi}^{2\pi} + \int_{-\pi}^{2\pi} \cos t dt \\ &= (-2\pi + \pi) + [\sin t]_{-\pi}^{2\pi} \\ &= -\pi \end{aligned}$$

であるから、最小値は $f(\pi) = -\pi$ である。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値: } -\pi$$