

(1)

与式に $n=1$ を代入して,

$$\begin{aligned} S_1 &= 2^2 - a_1 \\ \Leftrightarrow a_1 &= 4 - a_1 \\ \therefore a_1 &= 2 \end{aligned}$$

となる。次に $n=2$ を代入して,

$$\begin{aligned} S_2 &= 2^3 - a_2 \\ \Leftrightarrow a_1 + a_2 &= 8 - a_2 \\ \therefore a_2 &= 3 \end{aligned}$$

となる。次に $n=3$ を代入して,

$$\begin{aligned} S_3 &= 2^4 - a_3 \\ \Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 &= 16 - a_3 \\ \therefore a_3 &= \frac{11}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = \frac{11}{2}$$

(2)

$S_{n+1} = 2^{n+2} - a_{n+1}$ から $S_n = 2^{n+1} - a_n$ を引くと,

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= (2^{n+2} - a_{n+1}) - (2^{n+1} - a_n) \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= 2^{n+1} - a_{n+1} + a_n \\ \therefore a_{n+1} &= 2^n + \frac{1}{2}a_n \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_{n+1} = 2^n + \frac{1}{2}a_n$$

(3)

$a_{n+1} = 2^n + \frac{1}{2}a_n$ の両辺を $2^{n+1} (> 0)$ で割ると,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2^n + \frac{1}{2}a_n \\ \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{a_n}{2^n} \\ \therefore b_{n+1} &= \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}$$

(4)

$b_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}$ を変形して,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - \frac{2}{3} &= \frac{1}{4}\left(b_n - \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

となる。ここで, $\left\{b_n - \frac{2}{3}\right\}$ は初項 $b_1 - \frac{2}{3} = \frac{a_1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, 公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列より,

$$\begin{aligned} b_n - \frac{2}{3} &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow b_n &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{a_n}{2^n} &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{3} \\ \therefore a_n &= \frac{1}{3}\left(2^{2-n} + 2^{n+1}\right) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{1}{3}\left(2^{2-n} + 2^{n+1}\right)$$

(1)

硬貨 A を選ぶ確率は $\frac{1}{2}$, 硬貨 B を選ぶ確率は $\frac{1}{3}$, 硬貨 C を選ぶ確率は $\frac{1}{6}$ であるから, 求める

確率は,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{17}{36}$$

となる。

(答) $\frac{17}{36}$

(2)

硬貨 A を選ぶ確率は $\frac{1}{2}$, 硬貨 B を選ぶ確率は $\frac{1}{3}$, 硬貨 C を選ぶ確率は $\frac{1}{6}$ であるから, 求める

確率は,

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{17}{72}$$

(答) $\frac{17}{72}$

(3)

条件付確率の公式を用いて,

$$\frac{\frac{17}{72}}{\frac{17}{36}} = \frac{1}{2}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}$

(4)

硬貨 A を選んで 2 回とも表が出る確率は,

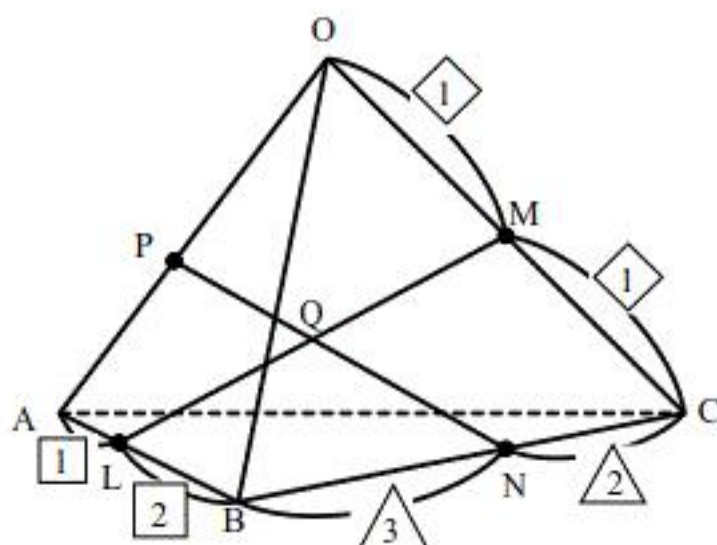
$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

である。条件付確率の公式を用いて,

$$\frac{\frac{1}{8}}{\frac{17}{72}} = \frac{9}{17}$$

となる。

(答) $\frac{9}{17}$



(1)

内分点の公式, 中点の公式を用いて,

$$\overrightarrow{OL} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OL} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}, \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{c}, \overrightarrow{ON} = \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}$$

(2)

実数 k, s, t を用いて $OP:PA = k:(1-k)$, $PQ:QN = s:(1-s)$, $MQ:QL = t:(1-t)$ とおくと,

$\overrightarrow{OP} = k\vec{a}$ とおける。ここで, $\overrightarrow{OQ}$ は内分点の公式から,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= (1-s)\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{ON} \\ &= (1-s)k\vec{a} + \frac{2}{5}s\vec{b} + \frac{3}{5}s\vec{c} \end{aligned}$$

と表せるが同時に,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= (1-t)\overrightarrow{OM} + t\overrightarrow{OL} \\ &= \frac{2}{3}t\vec{a} + \frac{1}{3}t\vec{b} + \frac{1}{2}(1-t)\vec{c} \end{aligned}$$

とも表せる。 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立であるから, 各係数を比較して,

$$\begin{cases} (1-s)k = \frac{2}{3}t \\ \frac{2}{5}s = \frac{1}{3}t \\ \frac{3}{5}s = \frac{1}{2}(1-t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}, s = \frac{5}{12}, k = \frac{4}{7}$$

となる。よって, $\overrightarrow{OP} = \frac{4}{7}\vec{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{4}{7}\vec{a}, \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$$

(3)

$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a}$ から, $\overrightarrow{LM}, \overrightarrow{NP}$ の内積を求めて,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{LM} \cdot \overrightarrow{NP} &= (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OL}) \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}) \\ &= \left(-\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) \cdot \left(\frac{4}{7}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b} - \frac{3}{5}\vec{c}\right) \\ &= \left(-\frac{8}{21} + \frac{2}{15} - \frac{3}{10}\right)|\vec{a}|^2 + \left(\frac{4}{15} + \frac{6}{15} - \frac{4}{21} + \frac{1}{5} + \frac{2}{7} - \frac{1}{5}\right)\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= -\frac{115}{210}|\vec{a}|^2 + \frac{160}{210}|\vec{a}|^2 \cos \angle AOB \end{aligned}$$

となる。ここで $\overrightarrow{LM} \cdot \overrightarrow{NP} = 0$ であるから,

$$\begin{aligned} -\frac{115}{210}|\vec{a}|^2 + \frac{160}{210}|\vec{a}|^2 \cos \angle AOB &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{115}{210} + \frac{160}{210} \cos \angle AOB &= 0 \quad \left(\because |\vec{a}|^2 \neq 0\right) \\ \therefore \cos \angle AOB &= \frac{23}{32} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{23}{32}$$

(1)

C は定数であるから, $g(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{2}} \cos x + C$ の導関数が $f(x)$ であることを示せばよい。ここで,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}} \sin x \\ &= \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= e^{-x} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

となり示せた。

(証明終)

(2)

(1)より,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x) dx &= \left[-\frac{e^{-x}}{\sqrt{2}} \cos x \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + e^{-\pi}) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + e^{-\pi})$$

(3)

$F(x)$ を計算すると,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt \\ &= \left[-\frac{e^{-t}}{\sqrt{2}} \cos t \right]_0^x \\ &= -\frac{e^{-x}}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となる。ここで, $-1 \leq \cos x \leq 1$ より,

$$-\frac{e^{-x}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \leq F(x) \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる。 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-x}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ から, はさみうちの原理を用いて,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

5

[1]

与式の左辺を変形して、

$$\begin{aligned}\int_a^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx &= \int_a^\beta \{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\}dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - (\alpha+\beta) \cdot \frac{1}{2}x^2 + \alpha\beta x \right]_a^\beta \\ &= \frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3) - \frac{\alpha+\beta}{2}(\beta^2 - \alpha^2) + \alpha\beta(\beta - \alpha) \\ &= \frac{1}{6}\{2(\beta^3 - \alpha^3) - 3(\alpha+\beta)(\beta^2 - \alpha^2) + 6\alpha\beta(\beta - \alpha)\} \\ &= \frac{\beta - \alpha}{6}\{2(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2) - 3(\alpha+\beta)^2 + 6\alpha\beta\} \\ &= -\frac{\beta - \alpha}{6}(\beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2) \\ &= -\frac{(\beta - \alpha)^3}{6}\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

[2](1)

$y = -x^2 - 2x + 4$ を微分すると、

$$y' = -2x - 2$$

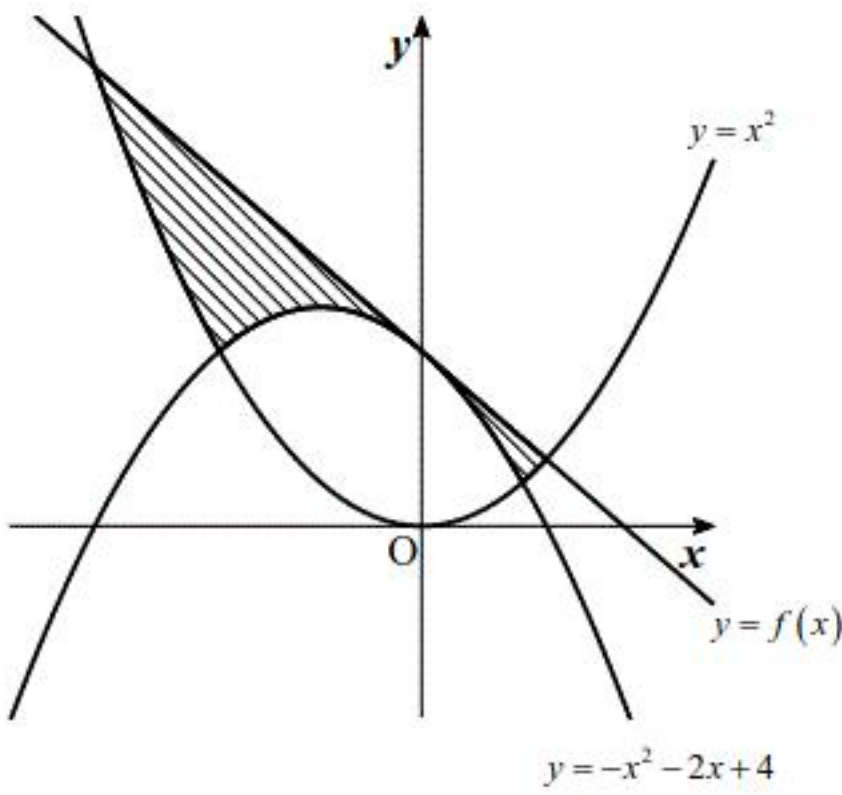
となるから、

$$\begin{aligned}f(x) &= (-2t - 2)(x - t) - t^2 - 2t + 4 \\ &= (-2t - 2)x + t^2 + 4\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = (-2t - 2)x + t^2 + 4$$

(2)



$y = f(x)$ と曲線 C_2 に囲まれた面積を $S_1(t)$ とする。 $y = f(x)$ と曲線 C_2 の交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、

$$\begin{aligned}(-2t - 2)x + t^2 + 4 &= x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + (2t + 2)x - t^2 - 4 &= 0 \\ \therefore \alpha &= -(t + 1) - \sqrt{2t^2 + 2t + 5}, \beta = -(t + 1) + \sqrt{2t^2 + 2t + 5}\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}S_1(t) &= \int_a^\beta [(-2t - 2)x + t^2 + 4 - x^2]dx \\ &= -\int_a^\beta (x - \alpha)(x - \beta)dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{6}\left\{2\left(2t^2 + 2t + 5\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^3 \\ &= \frac{4}{3}\left(2t^2 + 2t + 5\right)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

となる。また、曲線 C_1 と曲線 C_2 に囲まれた面積を S_2 とする。曲線 C_1 と曲線 C_2 の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned}-x^2 - 2x + 4 &= x^2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) &= 0 \\ \therefore x &= -2, 1\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}S_2 &= \int_{-2}^1 \{(-x^2 - 2x + 4) - x^2\}dx \\ &= -2 \int_{-2}^1 (x + 2)(x - 1)dx \\ &= (-2) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \{1 - (-2)\}^3 \\ &= 9\end{aligned}$$

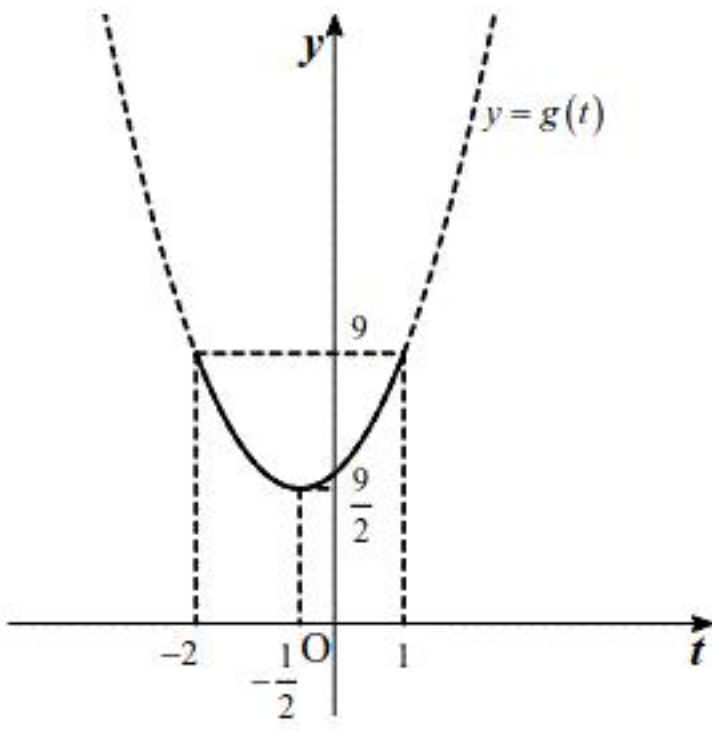
となる。以上より、

$$\begin{aligned}S(t) &= S_1(t) - S_2 \\ &= \frac{4}{3}\left(2t^2 + 2t + 5\right)^{\frac{3}{2}} - 9\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{4}{3}\left(2t^2 + 2t + 5\right)^{\frac{3}{2}} - 9$$

(3)



$g(t) = 2t^2 + 2t + 5$ とおくと、

$$\begin{aligned}g(t) &= 2t^2 + 2t + 5 \\ &= 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}\end{aligned}$$

となるため、 $g(t)$ は $t = -\frac{1}{2}$ のとき最小値 $2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 = \frac{9}{2}$ をとり、 $t = -2, 1$ のとき最大値 $2 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 5 = 9$ をとる。 $S(t)$ が最大値最小値をとるときの t は $g(t)$ が最大値最小値をと

るときの t に一致するため、 $S(t)$ は $t = -\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{4}{3}\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - 9 = 9\sqrt{2} - 9$ をとり、 $t = -2, 1$

のとき最大値 $\frac{4}{3} \cdot 9^{\frac{3}{2}} - 9 = 27$ をとる。

$$(\text{答}) \quad t = -\frac{1}{2} \text{ のとき最小値 } 9\sqrt{2} - 9, \quad t = -2, 1 \text{ のとき最大値 } 27$$

(1)

$f(x)$ を微分すると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x - 9 \\ &= 3(x-3)(x+1) \end{aligned}$$

となる。よって増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	10	$\searrow$	-22	$\nearrow$

よって、 $x=-1$ のとき極大値 10 、 $x=3$ のとき極小値 -22 である。

(答) $x=-1$ のとき極大値 10 、 $x=3$ のとき極小値 -22

(2)

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ と $y = x^4 + x^3 - 8x^2 - 9x + 9$ を連立して y を消去すると,

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - 9x + 5 &= x^4 + x^3 - 8x^2 - 9x + 9 \\ \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) &= 0 \\ \therefore x &= \pm 1, \pm 2 \end{aligned}$$

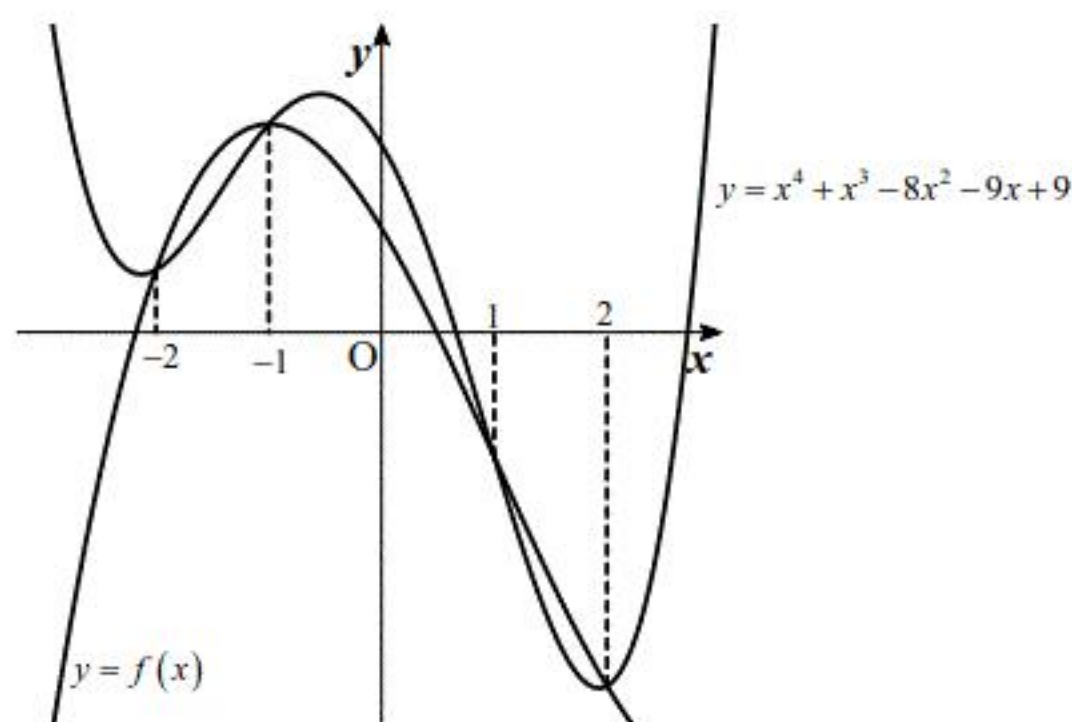
となる。このときの y の値をそれぞれ代入して求めて,

$$(x, y) = (-2, 3), (-1, 10), (1, -6), (2, -17)$$

となる。

(答) $(-2, 3), (-1, 10), (1, -6), (2, -17)$

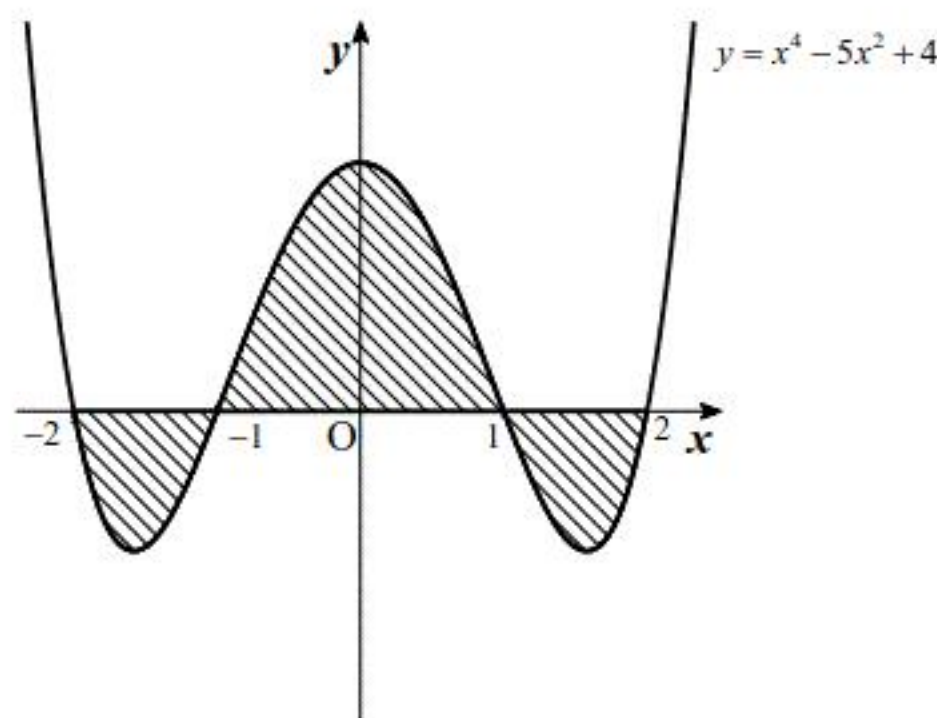
(3)



上図の位置関係より、求める面積は,

$$\begin{aligned} &\int_{-2}^{-1} \left\{ (x^3 - 3x^2 - 9x + 5) - (x^4 + x^3 - 8x^2 - 9x + 9) \right\} dx \\ &+ \int_{-1}^1 \left\{ (x^4 + x^3 - 8x^2 - 9x + 9) - (x^3 - 3x^2 - 9x + 5) \right\} dx \\ &+ \int_1^2 \left\{ (x^3 - 3x^2 - 9x + 5) - (x^4 + x^3 - 8x^2 - 9x + 9) \right\} dx \\ &= \int_{-2}^{-1} (-x^4 + 5x^2 - 4) dx + \int_{-1}^1 (x^4 - 5x^2 + 4) dx + \int_1^2 (-x^4 + 5x^2 - 4) dx \end{aligned}$$

となる。これは、以下の斜線部の面積に等しい。



$y = x^4 - 5x^2 + 4$ は偶関数であるから、求める面積は,

$$\begin{aligned} &2 \left\{ \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4) dx - \int_1^2 (x^4 - 5x^2 + 4) dx \right\} \\ &= 2 \left\{ \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x \right]_0^1 - \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x \right]_1^2 \right\} \\ &= 2 \left\{ \left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4 \right) - 0 - \left(\frac{1}{5} \cdot 2^5 - \frac{5}{3} \cdot 2^3 + 4 \cdot 2 \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4 \right) \right\} \\ &= 8 \end{aligned}$$

となる。

(答) 8