

1

(1)

直線 ℓ 上の点 z' は、実数 r を用いて

$$\begin{aligned} z' &= r \left\{ \cos \left(\pm \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\pm \frac{\pi}{4} \right) \right\} + 4 + 5i \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r + 4 \right) + \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2} r + 5 \right) i \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

と表される。ここで実軸と直線 ℓ の交点の候補は、

$$\begin{aligned} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} r + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow r &= \mp 5\sqrt{2} \quad (\text{複号同順}) \\ \therefore z' &= -1, 9 \end{aligned}$$

である。 α の実部が 4 より大きいということから、

$$\alpha = 9$$

となる。

(答) $\alpha = 9$

(2)

与式を変形すると、

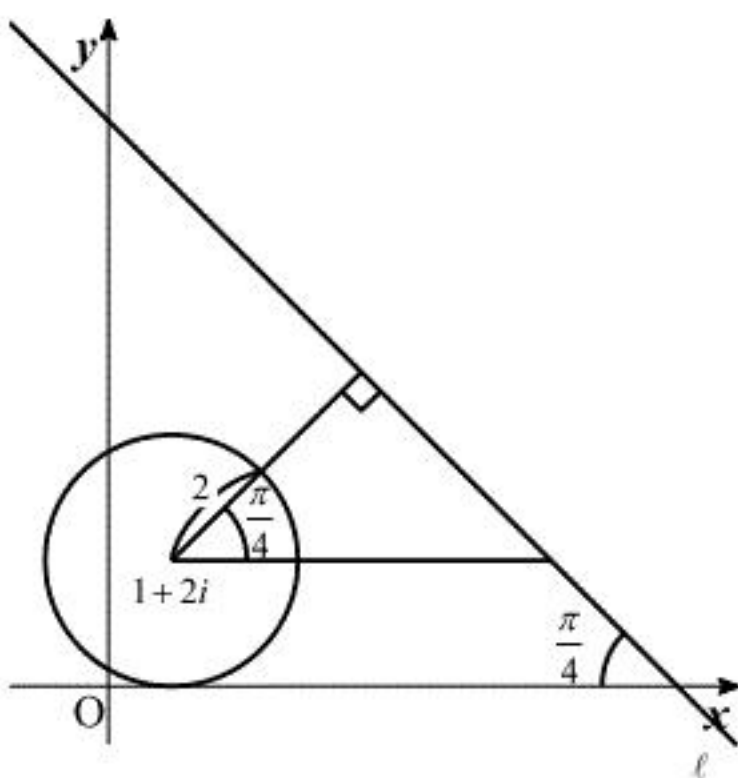
$$\begin{aligned} z\bar{z} + 1 &= (1 - 2i)z + (1 + 2i)\bar{z} \\ \Leftrightarrow z\bar{z} - (\overline{1 + 2i})z - (1 + 2i)\bar{z} &= -1 \\ \Leftrightarrow \{z - (1 + 2i)\} \{\overline{z - (1 + 2i)}\} &= 4 \\ \Leftrightarrow |z - (1 + 2i)|^2 &= 4 \\ \therefore |z - (1 + 2i)| &= 2 \end{aligned}$$

となるから、点 z は $1 + 2i$ を中心とした半径 2 の円上の点である。ここで、求める点は円の中心から直線 ℓ への垂線と円の交点のうち直線 ℓ に近い方である。また、この垂線は実軸の正の

向きと $\frac{\pi}{4}$ の角度をもつため、求める複素数は、下図より

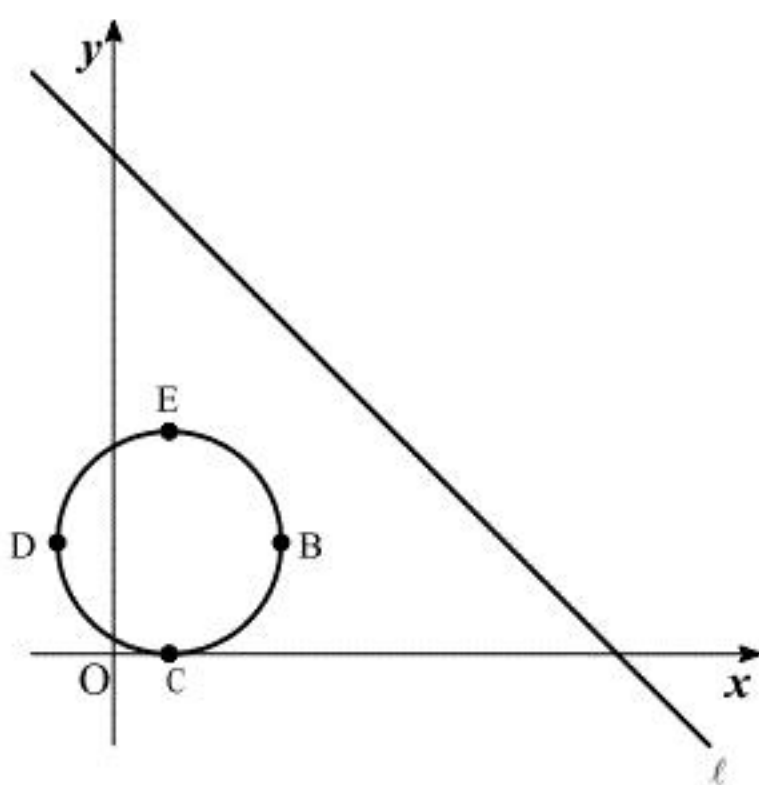
$$\begin{aligned} z &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) + 1 + 2i \\ &= (1 + \sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2})i \end{aligned}$$

となる。



(答) $z = (1 + \sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2})i$

(3)



方程式を満たす z を、実数 x, y を用いて $z = x + yi$ とおくと、(2)より、

$$\begin{aligned} |(x + yi) - (1 + 2i)|^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow |(x - 1) + (y - 2)i|^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 &= 4 \end{aligned}$$

となる。 x, y がともに整数であるとき、 $(x - 1)^2, (y - 2)^2$ はともに整数の 2 乗で表される。ゆ

えに、 $((x - 1)^2, (y - 2)^2)$ の組は、

$$((x - 1)^2, (y - 2)^2) = (4, 0), (0, 4)$$

となる。すなわち、

$$(x, y) = (3, 2), (-1, 2), (1, 0), (1, 4)$$

となり、実部と虚部がともに整数となるのは上図の 4 点である。 xy 平面において直線 ℓ は $x + y = 9$ であり、点 E, B は $x + y = 5$ 上、点 C, D は、 $x + y = 1$ 上にある。硬貨の表裏にかかわらず 1 回投げるごとに x, y のどちらか一方が 1 増える、すなわち $x + y$ は必ず 1 増える。よって、点 E, B からは 4 回投げれば必ず直線 ℓ 上にのる。一方で、点 C, D から 4 回投げても直線 ℓ 上

にはのらない。以上より点 A として点 E, B を選ぶ確率は $\frac{1}{2}$ より、求める確率も $\frac{1}{2}$ である。

(答) $\frac{1}{2}$

(1)

標準偏差の定義式より、

$$\begin{aligned}
 s_x &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2} \\
 &\leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\max(x) - \min(x))^2} \\
 &= \sqrt{(\max(x) - \min(x))^2} \\
 &= \max(x) - \min(x)
 \end{aligned}$$

となる。また、等号は、 $k=1, 2, \dots, n$ に対して $(x_k, \bar{x}) = (\max(x), \min(x)), (\min(x), \max(x))$ となるとき、すなわち $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ のときに成立する。

(証明終)

(答) 等号成立条件 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

(2)

 x と y の共分散を s_{xy} とする。右辺を変形すると、

$$\begin{aligned}
 \frac{s_x^2 + s_y^2 - s_z^2}{2s_x s_y} &= \frac{s_x^2 + s_y^2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (z_k - \bar{z})^2}{2s_x s_y} \\
 &= \frac{s_x^2 + s_y^2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{(x_k - \bar{x}) - (y_k - \bar{y})\}^2}{2s_x s_y} \\
 &= \frac{s_x^2 + s_y^2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{(x_k - \bar{x})^2 - 2(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) + (y_k - \bar{y})^2\}}{2s_x s_y} \\
 &= \frac{s_x^2 + s_y^2 - s_x^2 + 2s_{xy} - s_y^2}{2s_x s_y} \\
 &= \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \\
 &= r
 \end{aligned}$$

となるので示された。

(証明終)

(3)①

平均の定義式より、

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{10}(y_1 + y_2 + 63 + 77 + \dots + 65) &= 65 \\
 \therefore y_1 + y_2 &= 110 \quad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

となる。さらに、分散の定義式より、

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{10}\{(y_1 - 65)^2 + (y_2 - 65)^2 + \dots + (65 - 65)^2\} &= 64.8 \\
 \therefore (y_1 - 65)^2 + (y_2 - 65)^2 &= 250 \quad \dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

である。ここで、 $Y_1 = y_1 - 65, Y_2 = y_2 - 65$ ($Y_1 < Y_2$) とおくと、①、②は、

$$\begin{cases} Y_1 + Y_2 = -20 \\ Y_1^2 + Y_2^2 = 250 \end{cases}$$

となる。第2式を変形して、

$$\begin{aligned}
 Y_1^2 + Y_2^2 &= 250 \\
 \Leftrightarrow (Y_1 + Y_2)^2 - 2Y_1 Y_2 &= 250 \\
 \therefore Y_1 Y_2 &= 75
 \end{aligned}$$

となる。よって、 Y_1, Y_2 は k についての方程式

$$k^2 + 20k + 75 = 0 \Leftrightarrow (k+5)(k+15) = 0$$

の2解である。 $Y_1 < Y_2$ に注意してこれを解いて、

$$\begin{aligned}
 Y_1 = y_1 - 65 &= -15, Y_2 = y_2 - 65 = -5 \\
 \Leftrightarrow y_1 &= 50, y_2 = 60
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $y_1 = 50, y_2 = 60$

②

(2)の式を用いて相関係数を計算すると、

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{s_x^2 + s_y^2 - s_z^2}{2s_x s_y} \\
 &= \frac{83.4 + 64.8 - 19.0}{2 \cdot 9.13 \cdot 8.05} \\
 &= 0.878 \dots \\
 &= 0.88
 \end{aligned}$$

となる。これにより身長と体重には正の相関があると考えられる。

(答) $r = 0.88$, データは正の相関を持つ

3

(1)

$x = \tan \theta$ と置換する。このとき、 $dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$ であり、積分区間は以下のように変化する。

x	0	$\rightarrow$	1
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

よって、

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\pi}{4}$

(2)

$\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}$ において、

$$|\sin n\pi x| = \begin{cases} \sin n\pi x & (k \text{ が偶数}) \\ -\sin n\pi x & (k \text{ が奇数}) \end{cases}$$

である。以下、 k の偶奇によって場合分けする。

[1] k が偶数のとき、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |\sin n\pi x| dx &= \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \sin n\pi x dx \\ &= \left[-\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \\ &= \frac{2}{n\pi} \end{aligned}$$

となる。

[2] k が奇数のとき、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |\sin n\pi x| dx &= -\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \sin n\pi x dx \\ &= -\left[-\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \\ &= \frac{2}{n\pi} \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より、 k の偶奇に関わらず、求める値は、 $\frac{2}{n\pi}$ である。

(答) $\frac{2}{n\pi}$

(3)

$$\int_0^1 f(x) |\sin n\pi x| dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) |\sin n\pi x| dx \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。ここで、 $\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}$ において、

$$\frac{1}{\left(\frac{k+1}{n}\right)^2 + 1} \leq f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1}$$

となる。 $|\sin n\pi x| \geq 0$ であるから、

$$\frac{|\sin n\pi x|}{\left(\frac{k+1}{n}\right)^2 + 1} \leq f(x) |\sin n\pi x| \leq \frac{|\sin n\pi x|}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1}$$

である。この各辺を区間 $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ について定積分すると、(2)も用いて、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{|\sin n\pi x|}{\left(\frac{k+1}{n}\right)^2 + 1} dx &\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) |\sin n\pi x| dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{|\sin n\pi x|}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1} dx \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{k+1}{n}\right)^2 + 1} \cdot \frac{2}{n\pi} &\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) |\sin n\pi x| dx \leq \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1} \cdot \frac{2}{n\pi} \end{aligned}$$

となる。各辺を $k=0, 1, \dots, n-1$ についてそれぞれ足すと、①も用いて、

$$\frac{2}{n\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{k+1}{n}\right)^2 + 1} \leq \int_0^1 f(x) |\sin n\pi x| dx \leq \frac{2}{n\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1}$$

となる。この最左辺について、区分求積法を用いて極限をとると、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{k+1}{n}\right)^2 + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} (\because (1)) \end{aligned}$$

であり、最右辺について、区分求積法を用いて極限をとると、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1} &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} (\because (1)) \end{aligned}$$

となる。はさみうちの原理より、求める極限は、

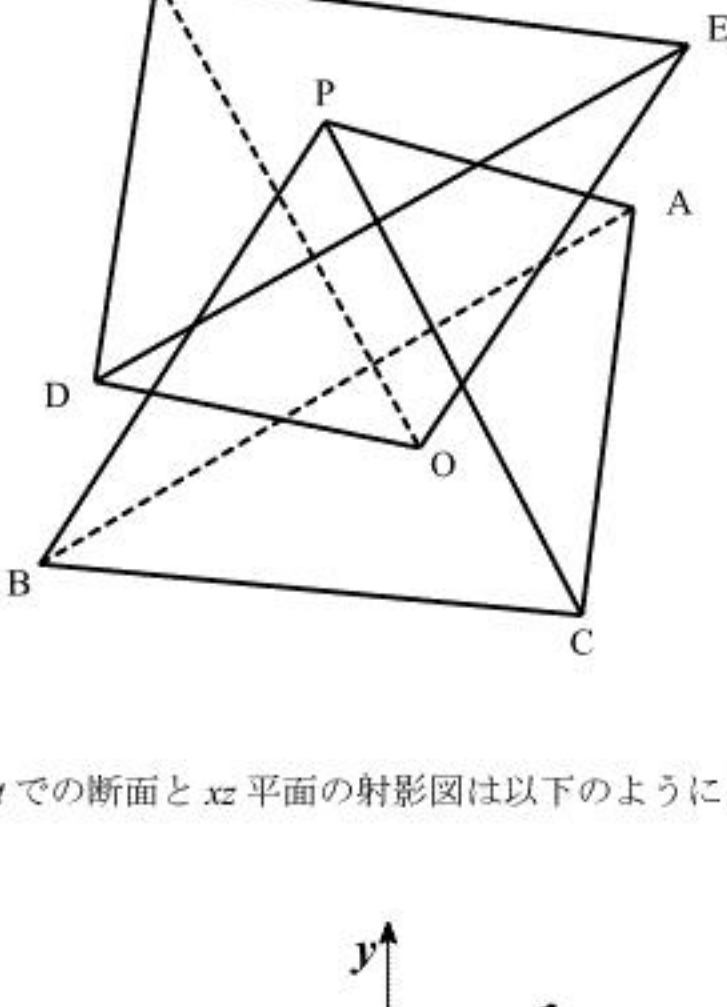
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) |\sin n\pi x| dx = \frac{1}{2}$$

である。

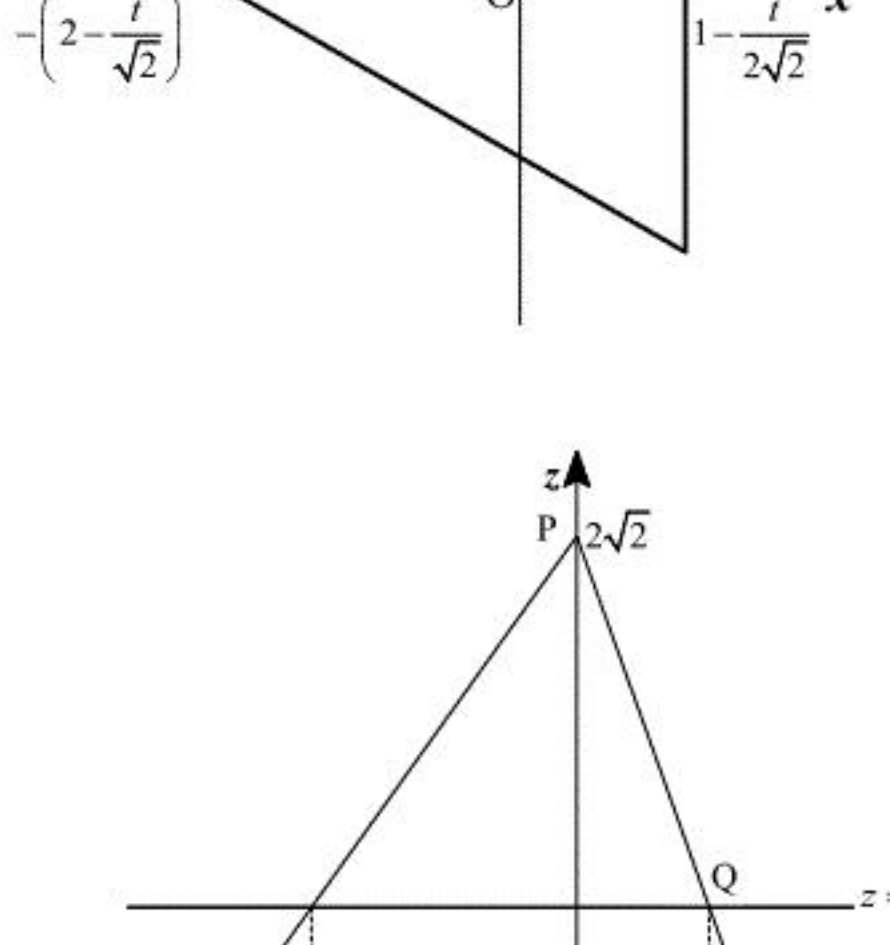
(答) $\frac{1}{2}$

4

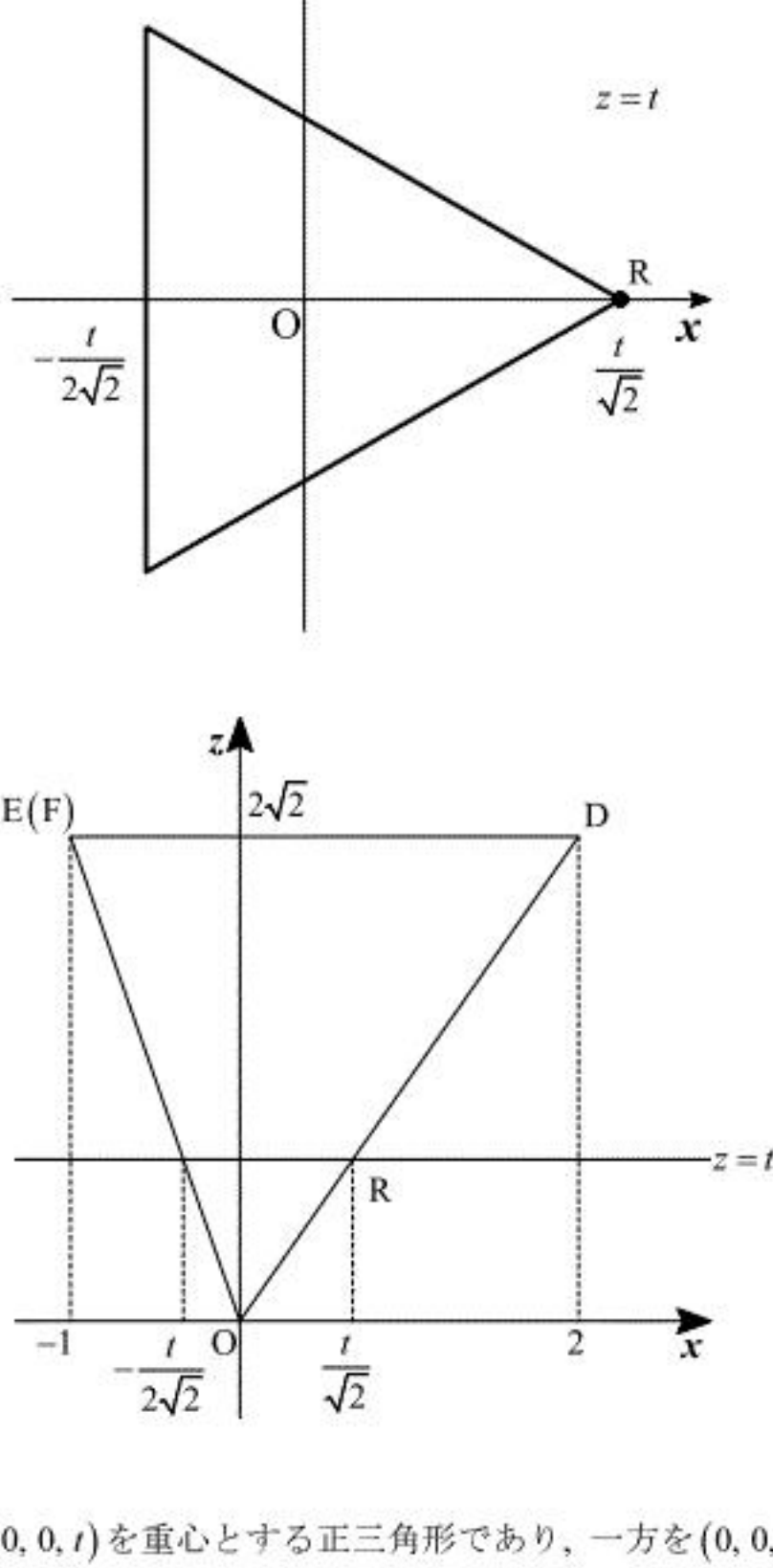
(1)



正四面体 PABC の $z=t$ での断面と xz 平面の射影図は以下のようになる。



また、正四面体 ODEF の $z=t$ による断面及び xz 平面への射影図は以下のようになる。



2つの断面はともに $(0, 0, t)$ を重心とする正三角形であり、一方を $(0, 0, t)$ を中心に 180° 回転し $(0, 0, t)$ を中心に拡大または縮小すれば他方に重なること、 $Q\left(1 - \frac{t}{2\sqrt{2}}, 0, t\right), R\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, 0, t\right)$

が重なる t の値が

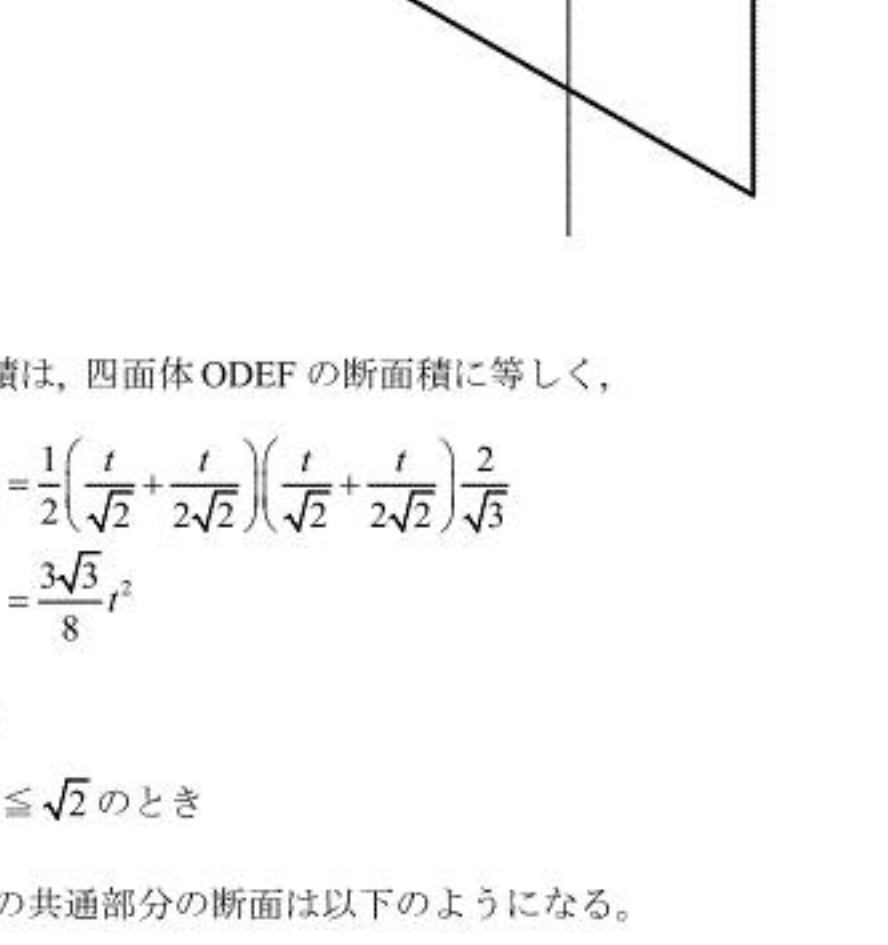
$$1 - \frac{t}{2\sqrt{2}} = \frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore t = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

であることから、共通部分の断面の様子は $t = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ の前後で変化する。

[1] $0 \leq t \leq \frac{2}{3}\sqrt{2}$ のとき

$z=t$ での共通部分の断面は以下のようになる。



この面積は、四面体 ODEF の断面積に等しく、

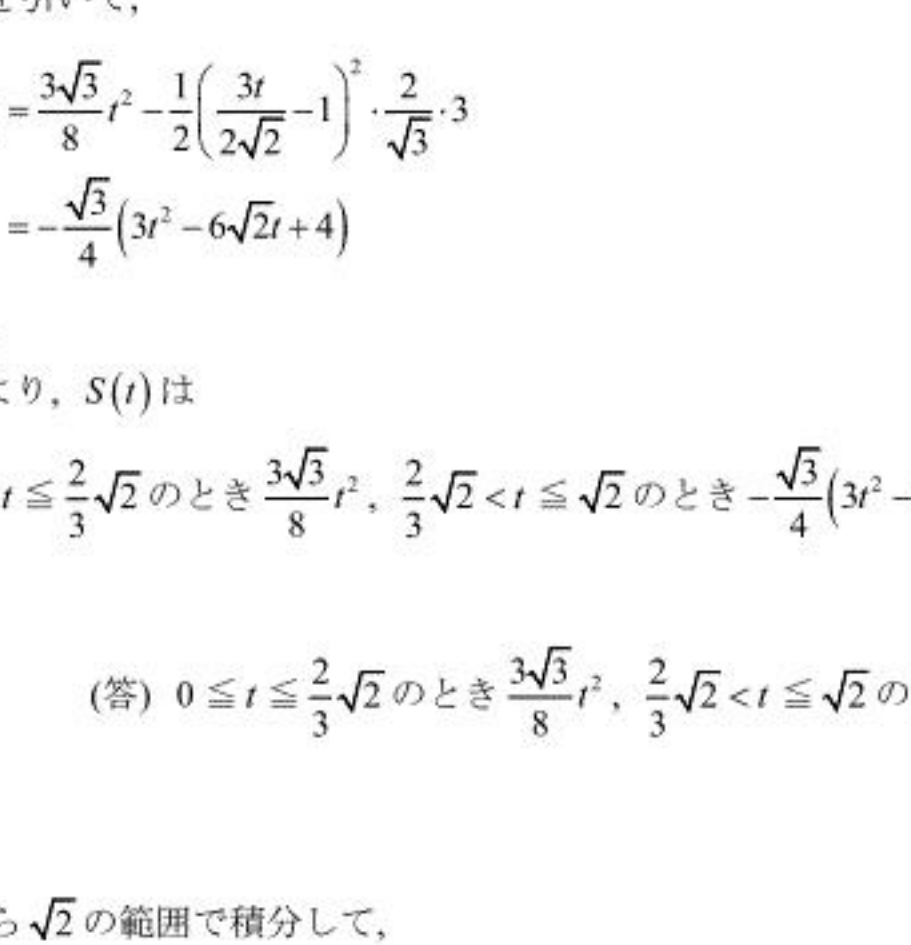
$$S(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2\sqrt{2}} \right) \left(\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2\sqrt{2}} \right) \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8} t^2$$

となる。

[2] $\frac{2}{3}\sqrt{2} < t \leq \sqrt{2}$ のとき

$z=t$ での共通部分の断面は以下のようになる。



この面積は、四面体 ODEF の断面積から、高さ $\frac{t}{\sqrt{2}} - \left(1 - \frac{t}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{3t}{2\sqrt{2}} - 1$ の正三角形 3 つ

の面積を引いて、

$$S(t) = \frac{3\sqrt{3}}{8} t^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{3t}{2\sqrt{2}} - 1 \right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 3$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4} (3t^2 - 6\sqrt{2}t + 4)$$

となる。

以上[1], [2]より、 $S(t)$ は

$$0 \leq t \leq \frac{2}{3}\sqrt{2} \text{ のとき } \frac{3\sqrt{3}}{8} t^2, \quad \frac{2}{3}\sqrt{2} < t \leq \sqrt{2} \text{ のとき } -\frac{\sqrt{3}}{4} (3t^2 - 6\sqrt{2}t + 4)$$

である。

$$(\text{答}) \quad 0 \leq t \leq \frac{2}{3}\sqrt{2} \text{ のとき } \frac{3\sqrt{3}}{8} t^2, \quad \frac{2}{3}\sqrt{2} < t \leq \sqrt{2} \text{ のとき } -\frac{\sqrt{3}}{4} (3t^2 - 6\sqrt{2}t + 4)$$

(2)

$S(t)$ を 0 から $\sqrt{2}$ の範囲で積分して、

$$\int_0^{\sqrt{2}} S(t) dt = \int_0^{\frac{2}{3}\sqrt{2}} \frac{3\sqrt{3}}{8} t^2 dt + \int_{\frac{2}{3}\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{4} (3t^2 - 6\sqrt{2}t + 4) \right\} dt$$

$$= \left[\frac{\sqrt{3}}{8} t^3 \right]_0^{\frac{2}{3}\sqrt{2}} + \left[-\frac{\sqrt{3}}{4} (t^3 - 3\sqrt{2}t^2 + 4t) \right]_{\frac{2}{3}\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{6}$$

となる。対称性より求める体積はこの倍であるから、

$$\frac{4}{9}\sqrt{6}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{4}{9}\sqrt{6}$$

(3)

(1)と同様にして、 $0 \leq t \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}$ と $\frac{2\sqrt{2}}{3} < t \leq \sqrt{2}$ で分けて考える。四面体 ODEF、四面体

PABC は 1 辺 $2\sqrt{3}$ 、高さ $2\sqrt{2}$ の正四面体であることを考慮すると、 K の $0 \leq t \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}$ の部分

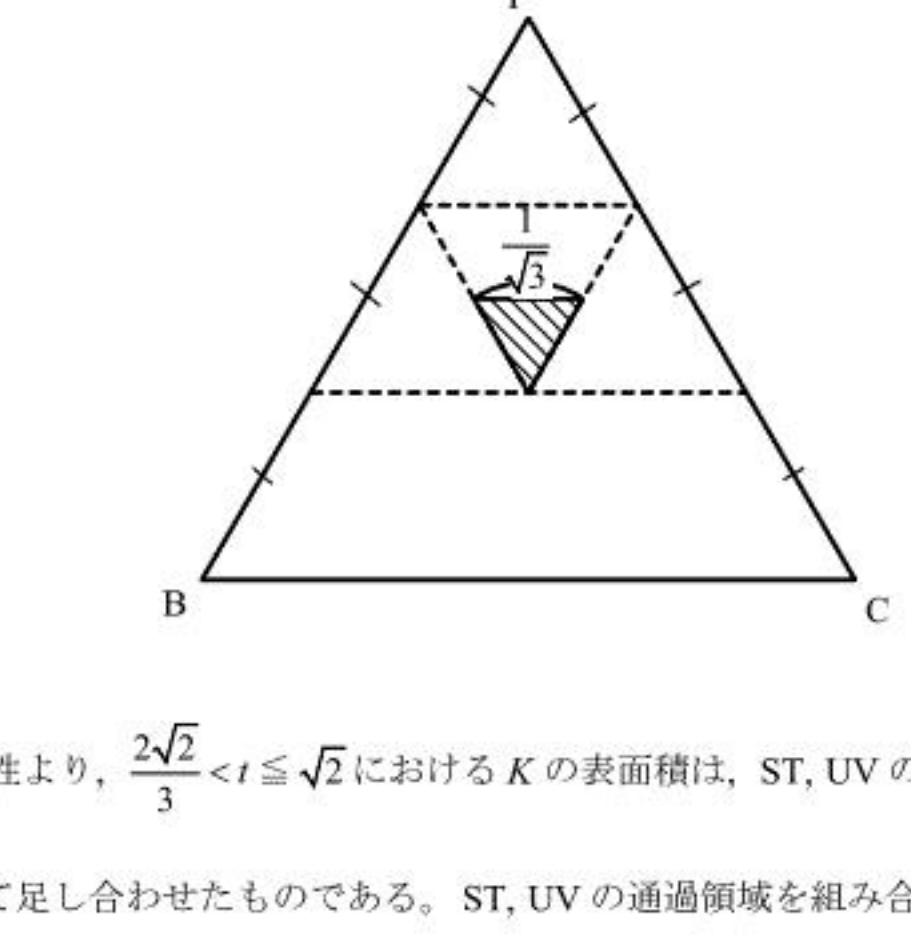
は正四面体 ODEF の $0 \leq t \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}$ の部分に等しいから、高さ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 、1 辺の長さ

$2\sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ の正四面体の側面(3 面)の面積に等しい。これは 1 辺の長さ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ の正三角形

の面積を 3 倍して、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot 3 = \sqrt{3}$$

である。次に、 $\frac{2\sqrt{2}}{3} < t \leq \sqrt{2}$ のとき、(1)より断面は以下のようになる。



この断面において、ST は $\triangle OEF$ の面上にあり、その長さは正三角形の性質を利用して、

$$ST = \left(-\frac{t}{2\sqrt{2}} + 2 - \frac{t}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= \left(2 - \frac{3t}{2\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

である。同様に考えて、UV は $\triangle PBC$ の面上にあり、その長さは、

$$UV = \left\{ \frac{t}{\sqrt{2}} - \left(1 - \frac{t}{2\sqrt{2}} \right) \right\} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= \left(\frac{3t}{2\sqrt{2}} - 1 \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

である。 t が $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ から $\sqrt{2}$ へ変化するとき、ST は $\frac{2}{\sqrt{3}}$ から $\frac{1}{\sqrt{3}}$ に $\triangle OEF$ の面上で変化する。よ

って、ST の通過領域は以下のようになる。

同様に考えると、UV の長さは 0 から $\frac{1}{\sqrt{3}}$ へと $\triangle PBC$ の面上で変化する。この通過領域を図

示すると以下のようになる。

断面の対称性より、 $\frac{2\sqrt{2}}{3} < t \leq \sqrt{2}$ における K の表面積は、ST, UV の通過領域の面積をそれ

ぞれ 3 倍して足し合わせたものである。ST, UV の通過領域を組み合わせることで 1 辺 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ の

正三角形となることを利用すると、正三角形の面積を 3 倍したものを求めて、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot 3 = \sqrt{3}$$

となる。ゆえに、 $0 \leq t \leq \sqrt{2}$ における K の表面積は、

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

である。したがって、対称性より求める面積は、

$$2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 4\sqrt{3}$$