

(1)

$0 \leq x \leq \pi$ より $-1 \leq \cos x \leq 1$ であるから、与式を変形して、

$$\begin{aligned} 2\cos^2 x + 5\cos x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos x &= \frac{1}{2} \\ \therefore x &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\pi}{3}$

(2)

a_n は初項 1, 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから、

$$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

となる。よって n の範囲は、

$$\begin{aligned} a_n &< \frac{1}{10^{10}} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} &< \frac{1}{10^{10}} \\ \Leftrightarrow 10^{10} &< 3^{n-1} \\ \Leftrightarrow 10 &< (n-1)\log_{10} 3 \\ \therefore \frac{10}{\log_{10} 3} + 1 &< n \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ より、

$$21 < \frac{10}{\log_{10} 3} + 1 = 21.95 \cdots < 22$$

であるから求める最小の n は 22 である。

(答) 22

(3)

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} (1-x)(x+2) & (-2 \leq x \leq 2) \\ -(1-x)(x+2) & \left(-\frac{5}{2} \leq x < -2\right) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} & (-2 \leq x \leq 2) \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} & \left(-\frac{5}{2} \leq x < -2\right) \end{cases} \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ は、 $-2 \leq x \leq 2$ において $x = -\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{9}{4}$ 、 $-\frac{5}{2} \leq x < -2$ において $x = -\frac{5}{2}$

で最大値 $\frac{7}{4}$ をとる。したがって、 $f(x)$ は $-\frac{5}{2} \leq x \leq 2$ において $x = -\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{9}{4}$ をとる。

(答) $\frac{9}{4}$

(4)

$g(x)$ を微分すると、

$$g'(x) = 3(a+1)x^2 + 6(a+1)x + 6a$$

となる。 $g(x)$ が極値を持つのは $g'(x)$ が符号変化するとき、すなわち $a \neq -1$ より 2 次方程式 $g'(x) = 0$ が 2 つの異なる実数解をもつときである。このとき、 $g'(x) = 0$ の判別式を D として、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow 9(a+1)^2 - 18a(a+1) &> 0 \\ \Leftrightarrow (a+1)^2 - 2a(a+1) &> 0 \\ \Leftrightarrow (a+1)(-a+1) &> 0 \\ \therefore -1 &< a < 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $-1 < a < 1$

(1)

$g(x) = -\frac{\cos x + 2\sin x}{5e^{2x}}$ とおいたとき, その第一次導関数が $f(x)$ となることを示せばよい。

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{(\cos x + 2\sin x)'(5e^{2x}) - (\cos x + 2\sin x)(5e^{2x})'}{(5e^{2x})^2} \\ &= -\frac{5e^{2x}(-\sin x + 2\cos x - 2\cos x - 4\sin x)}{25e^{4x}} \\ &= \frac{\sin x}{e^{2x}} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

となる。よって示された。

(証明終)

(2)

$0 \leq x \leq \pi$ で $f(x) \geq 0$, $\pi \leq x \leq 2\pi$ で $f(x) \leq 0$ より,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx &= \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} -f(x) dx \\ &= \int_0^{\pi} f(x) dx - \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx \\ &= \left[-\frac{\cos x + 2\sin x}{5e^{2x}} \right]_0^{\pi} - \left[-\frac{\cos x + 2\sin x}{5e^{2x}} \right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{2}{5e^{2\pi}} + \frac{1}{5e^{4\pi}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{5} + \frac{2}{5e^{2\pi}} + \frac{1}{5e^{4\pi}}$$

(3)

$(k-1)\pi \leq x \leq k\pi$ において,

$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x) & (k \text{ は偶数}) \\ f(x) & (k \text{ は奇数}) \end{cases}$$

である。よって, $|f(x)| = (-1)^{k+1} f(x)$ と表せる。したがって, 与式を変形すると,

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{n\pi} |f(x)| dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |f(x)| dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \{(-1)^{k+1} f(x)\} dx \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left[-\frac{\cos x + 2\sin x}{5e^{2x}} \right]_{(k-1)\pi}^{k\pi} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \left\{ \frac{(-1)^k}{5e^{2k\pi}} + \frac{(-1)^k}{5e^{2(k-1)\pi}} \right\} \\ &= \frac{1}{5} \sum_{k=1}^n \left\{ (e^{-2\pi})^k + (e^{-2\pi})^{k-1} \right\} \\ &= \frac{1}{5} \sum_{k=1}^n (e^{-2\pi})^{k-1} (e^{-2\pi} + 1) \\ &= \frac{\{1 - (e^{-2\pi})^n\} (e^{-2\pi} + 1)}{5(1 - e^{-2\pi})} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\{1 - (e^{-2\pi})^n\} (e^{-2\pi} + 1)}{5(1 - e^{-2\pi})}$$

(4)

$|e^{-2\pi}| < 1$ であるから,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{1 - (e^{-2\pi})^n\} (e^{-2\pi} + 1)}{5(1 - e^{-2\pi})} \\ &= \frac{e^{-2\pi} + 1}{5(1 - e^{-2\pi})} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{e^{-2\pi} + 1}{5(1 - e^{-2\pi})}$$

(1)

点 P_k は辺 OA を n 等分した点のうち x 座標の小さいほうから k 番目の点なので、

$$P_k \left(\frac{k}{n}a, 0 \right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P_k \left(\frac{k}{n}a, 0 \right)$$

(2)

与式を計算して、

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\overline{BP_k}|^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{k}{n}a - b \right)^2 + (0 - c)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{a^2}{n^2} k^2 - \frac{2ab}{n} k + b^2 + c^2 \right\} \\ &= \frac{1}{6} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} a^2 - \frac{n+1}{n} ab + b^2 + c^2 \\ &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) a^2 + b^2 + c^2 - \left(1 + \frac{1}{n} \right) ab \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) a^2 + b^2 + c^2 - \left(1 + \frac{1}{n} \right) ab$$

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) a^2 + b^2 + c^2 - \left(1 + \frac{1}{n} \right) ab \right\} \\ &= \frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 - ab \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 - ab$$

(1)

硬貨 A を選ぶ確率は $\frac{1}{2}$, 硬貨 B を選ぶ確率は $\frac{1}{3}$, 硬貨 C を選ぶ確率は $\frac{1}{6}$ であるから, 求める確率は,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{17}{36}$$

となる。

(答) $\frac{17}{36}$

(2)

硬貨 A を選ぶ確率は $\frac{1}{2}$, 硬貨 B を選ぶ確率は $\frac{1}{3}$, 硬貨 C を選ぶ確率は $\frac{1}{6}$ であるから, 求める確率は,

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{17}{72}$$

となる。

(答) $\frac{17}{72}$

(3)

条件付き確率の公式を用いて,

$$\frac{\frac{17}{72}}{\frac{17}{36}} = \frac{1}{2}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}$

(4)

硬貨 A を選んで 2 回とも表が出る確率は,

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

である。条件付き確率の公式を用いて,

$$\frac{\frac{1}{8}}{\frac{17}{72}} = \frac{9}{17}$$

となる。

(答) $\frac{9}{17}$