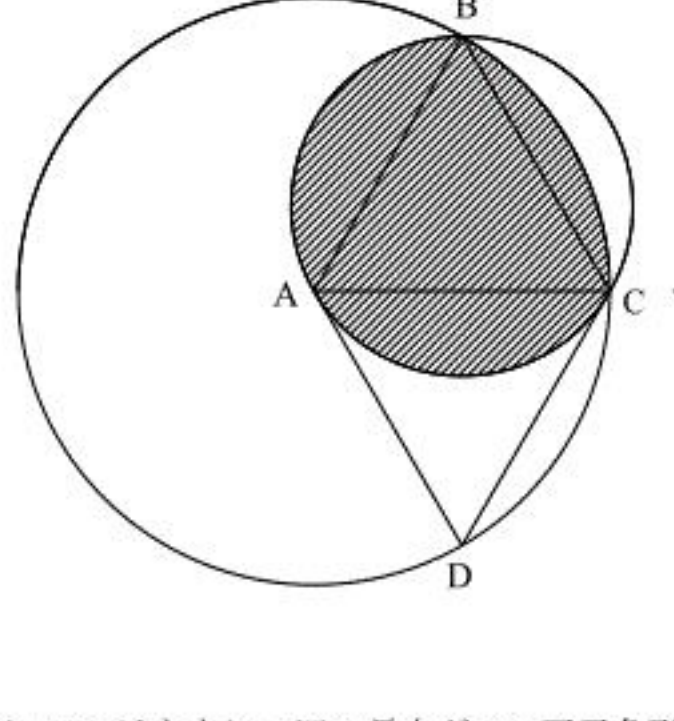


【1】

(1)



条件より、 $\triangle ABC$ および $\triangle ADC$ はともに一辺の長さが 2 の正三角形であり、求めるのは上図斜線部の領域の面積である。 C_1 の半径を R_1 とすると、 $\triangle ABC$ について正弦定理より

$$R_1 = \frac{2}{2\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

となり、 C_2 の半径を R_2 とすると、 $\triangle BCD$ について正弦定理より

$$R_2 = \frac{2}{2\sin \frac{\pi}{6}} = 2$$

となる。よって A は C_2 の中心である。求める面積のうち扇形 BAC の面積を S_1 、その他の部分の面積を S_2 とすると

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot R_2^2 = \frac{2}{3}\pi$$

となる。また、 S_2 は C_1 の面積から $\triangle ABC$ の面積を除いたものの $\frac{2}{3}$ に等しいから

$$S_2 = \frac{2}{3} \left(\pi R_1^2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{8}{9}\pi - \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

となるので、求める面積は

$$S_1 + S_2 = \frac{14}{9}\pi - \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{14}{9}\pi - \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

(2)

解と係数の関係より

$$2(\alpha + \beta) = \alpha + \beta + \gamma \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$8\sqrt{3} = \alpha\beta\gamma \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となる。 $\textcircled{1}$ 式より

$$\alpha + \beta = \gamma \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

であり、 $\textcircled{2}$ 式より

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \gamma^2 = \alpha\beta + (\alpha + \beta)\gamma$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta = \frac{1}{3}\gamma^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

となるから、 $\textcircled{3}$ 式より

$$\gamma^3 = 24\sqrt{3}$$

となるが、与式が実数係数の 3 次方程式であること、および $\textcircled{4}$ より $\alpha + \beta = \gamma$ が実数であることに注意すると、

$$\gamma = 2\sqrt{3}$$

を得る。 $\textcircled{4}$ 、 $\textcircled{5}$ 式より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2\sqrt{3} \\ \alpha\beta = 4 \end{cases}$$

となるから、 α, β は 2 次方程式

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 4 = 0$$

の解となる。よってこれを解いて

$$x = \sqrt{3} \pm i$$

となる。よって

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (\sqrt{3} + i, \sqrt{3} - i, 2\sqrt{3}), (\sqrt{3} - i, \sqrt{3} + i, 2\sqrt{3})$$

となる。

$$(\text{答}) (\alpha, \beta, \gamma) = (\sqrt{3} + i, \sqrt{3} - i, 2\sqrt{3}), (\sqrt{3} - i, \sqrt{3} + i, 2\sqrt{3})$$

(3)

$$y = (x^2 - 4)\log x (x > 0) \text{ から}$$

$$(x^2 - 4)\log x = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-2)\log x = 0$$

$$\therefore x = 1, 2 (\because x > 0)$$

であり、

$$y' = 2x\log x + x - \frac{4}{x}$$

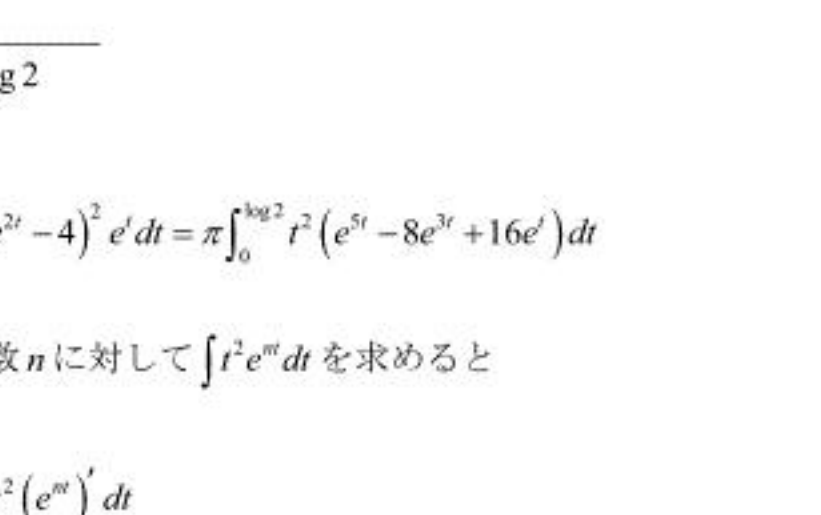
から $x = 1$ のとき

$$y' = -3 < 0$$

となり、また $x = 2$ のとき

$$y' = 4\log 2 > 0$$

となるので、曲線の概形は下ようになる。



よって求める体積 V は上図斜線部の領域を x 軸の周りに 1 回転させて得られる立体の体積であるから

$$V = \pi \int_1^2 y^2 dx = \pi \int_1^2 (x^2 - 4)^2 (\log x)^2 dx$$

となる。ここで $\log x = t \Leftrightarrow x = e^t$ とおくと、

$$dx = e^t dt$$

$$\begin{array}{c|c} x & 1 \rightarrow 2 \\ \hline t & 0 \rightarrow \log 2 \end{array}$$

となるから、

$$V = \pi \int_0^{\log 2} t^2 (e^{2t} - 4)^2 e^t dt = \pi \int_0^{\log 2} t^2 (e^{5t} - 8e^{3t} + 16e^t) dt$$

となる。ここで自然数 n に対して $\int t^n e^m dt$ を求めると

$$\begin{aligned} \int t^2 e^m dt &= \frac{1}{n} \int t^2 (e^m)' dt \\ &= \frac{t^2 e^m}{n} - \frac{2}{n} \int t e^m dt \\ &= \frac{t^2 e^m}{n} - \frac{2}{n^2} t e^m + \frac{2}{n^2} \int e^m dt \\ &= \frac{e^m}{n^3} (n^2 t^2 - 2nt + 2) + C \end{aligned}$$

となる (ただし C は積分定数)。よって

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\log 2} t^2 (e^{5t} - 8e^{3t} + 16e^t) dt \\ &= \pi \left[\frac{e^{5t}}{125} (25t^2 - 10t + 2) - \frac{8e^{3t}}{27} (9t^2 - 6t + 2) + 16e^t (t^2 - 2t + 2) \right]_0^{\log 2} \\ &= \pi \left\{ \frac{256}{15} (\log 2)^2 - \frac{11776}{225} \log 2 + \frac{95674}{3375} \right\} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \pi \left\{ \frac{256}{15} (\log 2)^2 - \frac{11776}{225} \log 2 + \frac{95674}{3375} \right\}$$

(4)

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\sin x} \right) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} + 1 \right) = \infty$$

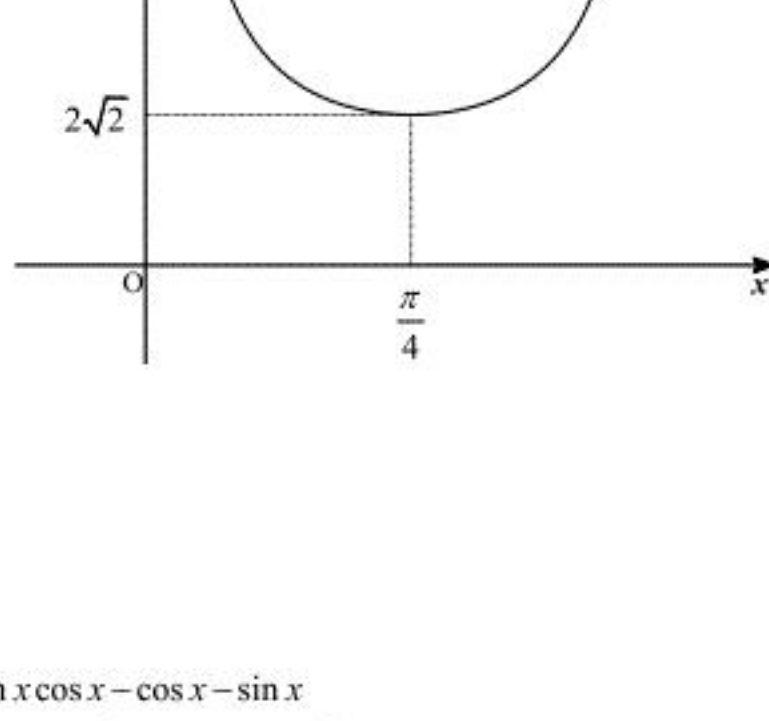
であり、また

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} \right)' \\ &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \\ &= \frac{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)}{\sin^2 x \cos^2 x} \end{aligned}$$

となるから、 $y = g(x)$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$ の増減は下ようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2} \right)$
$g'(x)$	$\diagdown$	$-$	0	$+$	$\diagup$
$g(x)$	(∞)	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	(∞)

よってグラフは下図のようになる。



(答) 前図

(ii)

$$\begin{aligned} f'(x) &= a \sin x \cos x - \cos x - \sin x \\ &= \sin x \cos x \left(a - \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} \right) \\ &= \sin x \cos x \{ a - g(x) \} \end{aligned}$$

となる。よって $0 < x < \frac{\pi}{2}$ より、 $y = f(x)$ が 2 つの極値を持つ必要条件是 $g(x) = a$ が $0 < x < \frac{\pi}{2}$

に 2 つの解を持つことである。(i) よりこの条件は

$$a > 2\sqrt{2}$$

であり、また上式が満たされるとき $g(x) = a$ を満たす x の前後で $f'(x)$ の符号が変わるので、これが $y = f(x)$ が 2 つの極値を持つ必要十分条件である。

$$(\text{答}) a > 2\sqrt{2}$$

(iii)

$$\begin{cases} \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos x \\ \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin x \end{cases}$$

から

$$g \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = g(x)$$

となるので、 $y = g(x)$ は $x = \frac{\pi}{4}$ に関して対称である。よって $g(x) = a$ のうち一方の解を α と

おくともう一方の解は $\frac{\pi}{2} - \alpha$ となる。よって求める値は

$$\begin{aligned} f(\alpha) + f \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) &= \left(\frac{a}{2} \sin^2 \alpha - \sin \alpha + \cos \alpha \right) + \left(\frac{a}{2} \cos^2 \alpha - \cos \alpha + \sin \alpha \right) \\ &= \frac{a}{2} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{a}{2}$$

〔2〕

立方体の一辺の長さを l とすると、

$$\begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = l \\ \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{a} = 0 \end{cases}$$

となる。

(1)

直線 OP と直線 BQ の交点を R とおくと、点 R が直線 OP 上にあることから実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OR} = t\overrightarrow{OP}$$

と表すことができる。また、直線 BR と直線 OP が直交することから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BR} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot (t\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x\vec{a} + y\vec{c} + \vec{d}) \cdot \{t(x\vec{a} + y\vec{c} + \vec{d}) - (\vec{a} + \vec{c})\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x\vec{a} + y\vec{c} + \vec{d}) \cdot \{(tx-1)\vec{a} + (ty-1)\vec{c} + t\vec{d}\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{x(tx-1) + y(ty-1) + t\}l^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow t = \frac{x+y}{x^2+y^2+1} &\dots\dots ① \end{aligned}$$

となる。更に点 Q は直線 BR 上にあるから、実数 s を用いて $\overrightarrow{BQ} = s\overrightarrow{BR}$ と表されるので

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BQ} &= s\overrightarrow{BR} \\ &= st\overrightarrow{OP} - s\overrightarrow{OB} \\ &= stx\vec{a} + sty\vec{c} + st\vec{d} - s\vec{a} - s\vec{c} \\ &= s(tx-1)\vec{a} + s(ty-1)\vec{c} + st\vec{d} \dots\dots ② \end{aligned}$$

となる。点 Q は四角形 $DEFG$ を含む平面上にあるので、

$$st = 1$$

となる。上式を満たす s が存在するような t の条件は $t \neq 0$ であるから、①より

$$x+y \neq 0$$

となる。 $x+y \neq 0$ のとき

$$s = \frac{1}{t} = \frac{x^2+y^2+1}{x+y}$$

であるから、②式より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BQ} \\ &= (stx-s+1)\vec{a} + (sty-s+1)\vec{c} + st\vec{d} \\ &= \left(x+1-\frac{x^2+y^2+1}{x+y}\right)\vec{a} + \left(y+1-\frac{x^2+y^2+1}{x+y}\right)\vec{c} + \vec{d} \\ &= \frac{xy-y^2+x+y-1}{x+y}\vec{a} + \frac{xy-x^2+x+y-1}{x+y}\vec{c} + \vec{d} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x+y \neq 0, \frac{xy-y^2+x+y-1}{x+y}\vec{a} + \frac{xy-x^2+x+y-1}{x+y}\vec{c} + \vec{d}$$

(2)

点 P が四角形 $DEFG$ の内部または辺上にあるから、 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ である。ここで(1)より

$$t = \frac{x+y}{x^2+y^2+1}$$

であるが、

$$\begin{aligned} x^2+y^2+1-(x+y) &= \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0 \\ \therefore x^2+y^2+1 &> x+y \end{aligned}$$

となり、 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ と $x+y \neq 0$ から $x+y > 0$ であるので

$$\begin{aligned} 0 < \frac{x+y}{x^2+y^2+1} &< 1 \\ \Leftrightarrow 0 < t &< 1 \end{aligned}$$

となる。よって $\overrightarrow{OR} = t\overrightarrow{OP}$ より、点 R は線分 OP 上にあるので立方体の内部に存在することが示された。

(証明終)

(3)

(1), (2)から

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 < t < 1, x+y \neq 0$$

である。(1)より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= (stx-s+1)\vec{a} + (sty-s+1)\vec{c} + st\vec{d} \\ &= \left(x+1-\frac{1}{t}\right)\vec{a} + \left(y+1-\frac{1}{t}\right)\vec{c} + \vec{d} \end{aligned}$$

となるから、 Q が四角形 $DEFG$ の内部または辺上にあるとき

$$0 \leq x+1-\frac{1}{t} \leq 1 \dots\dots ③$$

$$0 \leq y+1-\frac{1}{t} \leq 1 \dots\dots ④$$

となる。③について $0 < t$ より

$$\begin{aligned} 0 &\leq tx+t-1 \leq t \\ \Leftrightarrow 1 &\leq t(x+1) \text{ かつ } tx \leq 1 \end{aligned}$$

となるが、 $tx \leq 1$ は満たされるので

$$\begin{aligned} 1 &\leq t(x+1) = \frac{(x+y)(x+1)}{x^2+y^2+1} \\ \Leftrightarrow (x+y)(x+1) &\geq x^2+y^2+1 \\ \Leftrightarrow x(y+1) &\geq y^2-y+1 \\ \Leftrightarrow x &\geq \frac{y^2-y+1}{y+1} (\because y+1 > 0) \dots\dots ⑤ \end{aligned}$$

となる。ここで $f(y) = \frac{y^2-y+1}{y+1}$ とすれば

$$f'(y) = \frac{(2y-1)(y+1) - (y^2-y+1)}{(y+1)^2} = \frac{y^2+2y-2}{(y+1)^2}$$

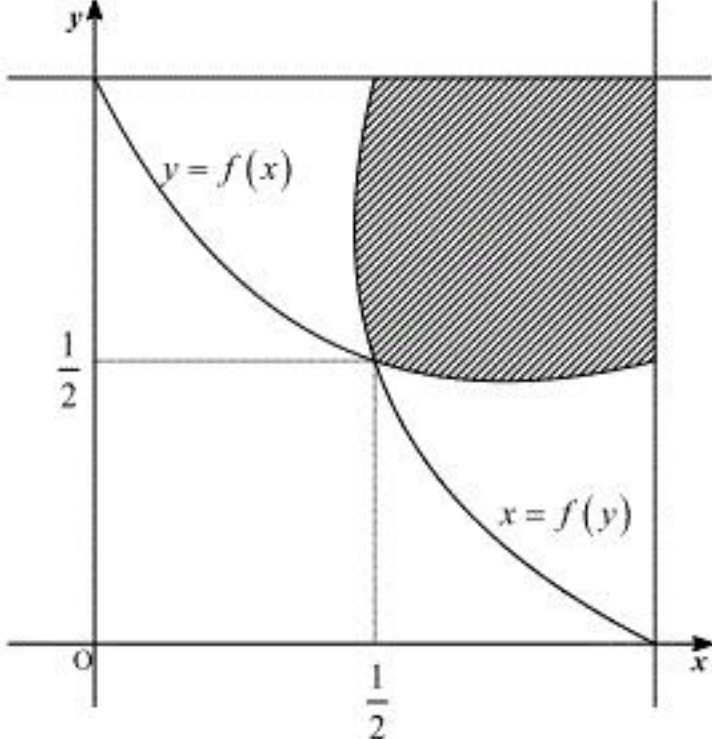
となるから、 $f(y)$ の増減は下ようになる。

y	0	...	$\sqrt{3}-1$	...	1
$f'(y)$	$\swarrow$	-	0	+	$\swarrow$
$f(y)$	$\swarrow$	$\searrow$	$2\sqrt{3}-3$	$\nearrow$	$\swarrow$

同様に④から

$$y \geq f(x) \dots\dots ⑥$$

が導かれるから、 (x, y) は⑤かつ⑥を満たす領域に存在し、これは下図斜線部の領域となる。ただし境界はすべて含む。



(答) 前図斜線部 (境界はすべて含む)

〔3〕

(1)

$y = \sqrt{2-x}$ が連続であることに注意すると、漸化式より

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2-a_n} \\ \Leftrightarrow a &= \sqrt{2-a}\end{aligned}$$

となる。ここで $a_n \geq 0$ であるから上式両辺を2乗すると

$$\begin{aligned}a^2 &= 2-a \\ \Leftrightarrow a^2 + a - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-1)(a+2) &= 0 \\ \therefore a &= 1 (\because a \geq 0)\end{aligned}$$

を得る。

(答) $a=1$

(2)

(1)の結果より, (i), (ii), (iii)の不等式はそれぞれ

$$a_{2n} < 1 < a_{2n-1} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$1 - a_{2n} \leq \frac{1}{2^{2n-1}} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2^{2n-1}} \leq a_{2n} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$a_{2n-1} - 1 \leq \frac{1}{2^{2n-2}} \Leftrightarrow a_{2n-1} \leq 1 + \frac{1}{2^{2n-2}} \quad \dots \textcircled{3}$$

と書き換えられ, また①, ②, ③の3式が成り立つことは

$$1 - \frac{1}{2^{2n-1}} \leq a_{2n} < 1 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$1 < a_{2n-1} \leq 1 + \frac{1}{2^{2n-2}} \quad \dots \textcircled{5}$$

の2式が成り立つことと同値である。また④は条件より

$$\begin{aligned}1 - \frac{1}{2^{2n-1}} &\leq a_{2n} < 1 \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2^{2n-1}} &\leq \sqrt{2-a_{2n-1}} < 1 \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2^{2n-2}} + \frac{1}{2^{4n-2}} &\leq 2 - a_{2n-1} < 1 \\ \Leftrightarrow 1 < a_{2n-1} &\leq 1 + \frac{1}{2^{2n-2}} - \frac{1}{2^{4n-2}} \quad \dots \textcircled{6}\end{aligned}$$

と同値変形でき, また⑥が成り立つとき明らかに⑤も成り立つので, 任意の自然数 n に対し⑥が成り立つことを示せばよい。このことを, 数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

$$1 + \frac{1}{2^{2-2}} - \frac{1}{2^{4-2}} = \frac{7}{4}$$

と $a_1 = \frac{7}{4}$ より, このとき⑥は成り立つ。

[2] $n=k$ で⑥が成り立つとき

このとき, $n=k+1$ でも⑥が成り立つ, すなわち

$$\begin{aligned}1 < a_{2k+1} &\leq 1 + \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{4k+2}} \\ \Leftrightarrow 1 < \sqrt{2-a_{2k}} &\leq 1 + \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{4k+2}} \\ \Leftrightarrow 1 < 2-a_{2k} &\leq \left(1 + \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{4k+2}}\right)^2 \\ \Leftrightarrow 2 - \left(1 + \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{4k+2}}\right)^2 &\leq a_{2k} < 1 \quad \dots \textcircled{7}\end{aligned}$$

が成り立つことを示せばよい。ここで, ④と⑥が同値であることに注意すると,

$$1 - \frac{1}{2^{2k-1}} \leq a_{2k} < 1 \quad \dots \textcircled{8}$$

が成り立つが,

$$\begin{aligned}2 - \left(1 + \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{4k+2}}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right) &= 1 + \frac{1}{2^{2k-1}} - \left(1 + \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{4k+2}}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2^{4k}} - \frac{1}{2^{8k+4}} + 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{2k}}\right) \frac{1}{2^{4k+2}} \\ &= \frac{-2^{4k+3} + 2^{2k+3} - 1}{2^{8k+4}} \\ &< \frac{-2^{4k+3} + 2^{2k+3}}{2^{8k+4}} \\ &< 0 \quad (\because k > 0)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2 - \left(1 + \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{4k+2}}\right)^2 < 1 - \frac{1}{2^{2k-1}}$$

より, ⑧のとき⑦は常に成り立つ。よって $n=k$ で⑥が成り立つならば, $n=k+1$ のときも⑥が成り立つ。

以上, [1], [2]より, 任意の自然数 n に対し⑥が成り立つ, すなわち(i), (ii), (iii)の不等式が成り立つことが示された。

(証明終)