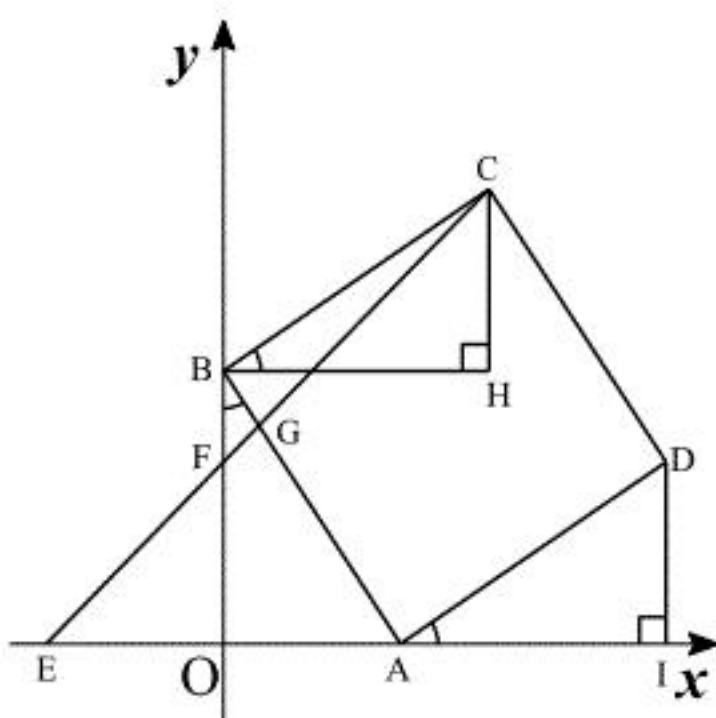


〔2〕

(1)



上図のように点H, Iを定めると、 $\triangle OAB$ 、 $\triangle HCB$ 、 $\triangle IDA$ は合同であるから

$$BH = AI = b, CH = DI = 1$$

となる。したがって、点C, Dの座標は $C(b, b+1)$ 、 $D(b+1, 1)$ であることがわかる。

(答) $C(b, b+1)$ 、 $D(b+1, 1)$

(2)

点C, Eを結ぶ直線の方程式は

$$y = \frac{b+1}{b-(-1)}\{x-(-1)\} \Leftrightarrow y = x+1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

であるから、点Fの座標は $F(0, 1)$ と求まる。また、点A, Bを結ぶ直線の方程式は

$$y = -b(x-1) \Leftrightarrow y = -bx+b \quad \cdots \textcircled{2}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ を連立することで、点Gの座標は

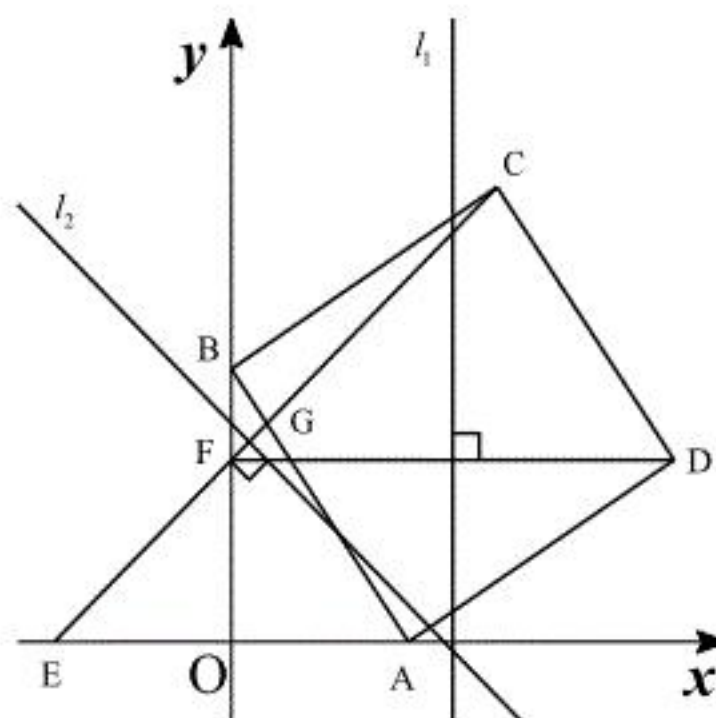
$$\begin{cases} y = x+1 \\ y = -bx+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ x+1 = -bx+b \end{cases}$$

$$\therefore (x, y) = \left(\frac{b-1}{b+1}, \frac{2b}{b+1} \right)$$

と求まる。

(答) $F(0, 1)$ 、 $G\left(\frac{b-1}{b+1}, \frac{2b}{b+1}\right)$

(3)



線分DF, FGの垂直二等分線をそれぞれ l_1, l_2 とすると、 $\triangle DFG$ の外接円の中心は l_1, l_2 の交点と一致する。まず、直線DFはx軸に平行であり、中点の座標は

$$\left(\frac{0+(b+1)}{2}, 1 \right) = \left(\frac{b+1}{2}, 1 \right)$$

であるから直線 l_1 の方程式は $x = \frac{b+1}{2}$ となる。また、直線FGの傾きは1であり、中点の座標は

$$\left(\frac{1}{2} \left(0 + \frac{b-1}{b+1} \right), \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2b}{b+1} \right) \right) = \left(\frac{b-1}{2(b+1)}, \frac{3b+1}{2(b+1)} \right)$$

であるから直線 l_2 の方程式は

$$y - \frac{3b+1}{2(b+1)} = - \left\{ x - \frac{b-1}{2(b+1)} \right\} \Leftrightarrow y = -x + \frac{2b}{b+1}$$

となる。したがって、 $\triangle DFG$ の外接円の中心の座標は

$$\begin{cases} x = \frac{b+1}{2} \\ y = -x + \frac{2b}{b+1} \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{b+1}{2}, -\frac{(b-1)^2}{2(b+1)} \right)$$

と求まる。

(答) $\left(\frac{b+1}{2}, -\frac{(b-1)^2}{2(b+1)} \right)$

【3】

(1)

関数 $g(x)$ を $g(x)=x-\sin(x+a)$ とおく。このとき、導関数 $g'(x)$ は

$$g'(x)=1-\cos(x+a)$$

となるから、常に $g'(x) \geq 0$ より単調増加関数であり

$$\begin{cases} x=-a+2m\pi \text{ (} m \text{ は整数) のとき, } g'(x)=0 \\ x \neq -a+2m\pi \text{ (} m \text{ は整数) のとき, } g'(x)>0 \end{cases}$$

であることがわかる。また、

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

であるから、方程式 $g(x)=0$ はただ1つの実数解をもち、命題は真であることがわかる。

(証明終)

(2)

$f(n\pi)$ の値は、方程式 $x=\sin(x+n\pi)$ の解 x である。 $n=0, 1, 2$ のとき、 $x=0$ が方程式を満たし、(1)よりこの方程式はただ1つの実数解をもつから、 $f(n\pi)=0 (n=0, 1, 2)$ であることがわかる。

(答) $f(n\pi)=0$

(3)

三角関数の定義より $\cos(x+f(x)) \leq 1$ であるから、 $0 < x < 2\pi$ のとき、 $\cos(x+f(x)) < 1$ を示

すためには $\cos(x+f(x)) \neq 1$ であることを示せばよい。 $\cos(x+f(x))=1$ と仮定すると

$$x+f(x)=2m\pi \text{ (} m \text{ は整数)} \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と表せる。ここで、 $f(x)$ は定義より

$$f(x)=\sin(x+f(x)) \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

を満たすから、①を②の右辺に代入することで

$$f(x)=\sin(2m\pi) \Leftrightarrow f(x)=0 \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となる。さらに、③を①に代入することで

$$x=2m\pi$$

となるが、これは $0 < x < 2\pi$ であることに矛盾する。したがって、背理法より題意は示された。

(証明終)

(4)

(i)

関数 $f(x)$ は②のような関係式を満たすから、同様にして関数 $\theta(x)=x+f(x)$ は関係式

$$\begin{aligned} \theta(x) &= x+f(x) \\ &= x+\sin(x+f(x)) \\ &= x+\sin(\theta(x)) \end{aligned} \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

を満たす。ここで、関数 $f(x)$ が $0 \leq x \leq 2\pi$ で連続、 $0 < x < 2\pi$ で微分可能であるとき、関数 $\theta(x)$ も $0 \leq x \leq 2\pi$ で連続、 $0 < x < 2\pi$ で微分可能となるから、 $0 < x < 2\pi$ の範囲で④を x について微分すると

$$\begin{aligned} \theta'(x) &= 1+\{\cos(\theta(x))\}\theta'(x) \\ \Leftrightarrow \{1-\cos(\theta(x))\}\theta'(x) &= 1 \end{aligned} \qquad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

となる。ここで、(3)の結果より、 $0 < x < 2\pi$ の範囲で

$$\cos(\theta(x)) < 1 \Leftrightarrow 1-\cos(\theta(x)) > 0$$

であるから、⑤より $\theta'(x)=\frac{1}{1-\cos(\theta(x))}(>0)$ となる。したがって、関数 $\theta(x)$ は $0 \leq x \leq 2\pi$ に

おいて増加することがわかる。

(証明終)

(ii)

関数 $f(x)$ は $f(x)=-x+\theta(x)$ と表せるから、これを $0 < x < 2\pi$ の範囲で x について微分して

整理すると

$$f'(x)=-1+\theta'(x)=-\{1-\cos(\theta(x))\}\theta'(x)+\theta'(x)=\{\cos(\theta(x))\}\theta'(x) \quad (\because \textcircled{5})$$

$$f''(x)=\theta''(x)=-\frac{\{\sin(\theta(x))\}\theta'(x)}{\{1-\cos(\theta(x))\}^2}=-\{\sin(\theta(x))\}\{\theta'(x)\}^3$$

となる。ここで、④より

$$\theta(x)=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}=x+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}-1$$

$$\theta(x)=\frac{3}{2}\pi \Leftrightarrow \frac{3}{2}\pi=x+\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}\pi+1$$

となることに注意すると、(2)と(4)(i)の結果を合わせて、 $x, \theta'(x), \theta(x), \cos(\theta(x)), \sin(\theta(x))$

の関係は以下の表ようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{2}-1$	...	π	...	$\frac{3}{2}\pi+1$	...	2π
$\theta'(x)$		+	+	+	+	+	+	+	
$\theta(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π	$\nearrow$	$\frac{3}{2}\pi$	$\nearrow$	2π
$\cos(\theta(x))$	1	+	0	-	-1	-	0	+	1
$\sin(\theta(x))$	0	+	1	+	0	-	-1	-	0

したがって、関数 $y=f(x)$ の増減、凹凸は以下の表ようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{2}-1$	...	π	...	$\frac{3}{2}\pi+1$	...	2π
$f''(x)$		-	-	-	0	+	+	+	
$f'(x)$		+	0	-	-	-	0	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	最大	$\searrow$	0	$\searrow$	最小	$\nearrow$	0

また、最大値と最小値は、 $\theta(x)$ の定義より

$$f\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+\theta\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+\frac{\pi}{2}=1$$

$$f\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)=-\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)+\theta\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)=-\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)+\frac{3}{2}\pi=-1$$

と求まる。

(答) 関数 $y=f(x) (0 \leq x \leq 2\pi)$ の増減、グラフの凹凸：前表、最大値：1、最小値：-1

(iii)

求める面積を S とすると、(ii)の結果より

$$S=\int_0^\pi f(x)dx+\int_\pi^{2\pi}\{-f(x)\}dx$$

と立式できる。したがって、 S の値は、 θ を積分変数と考えることで

$$\begin{aligned} S &= \int_{x=0}^{x=\pi} \sin(\theta(x))dx - \int_{x=\pi}^{x=2\pi} \sin(\theta(x))dx \quad (\because f(x)=\sin(x+f(x))=\sin(\theta(x))) \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin\theta \cdot \frac{dx}{d\theta}d\theta - \int_{\theta=\pi}^{\theta=2\pi} \sin\theta \cdot \frac{dx}{d\theta}d\theta \quad (\because \text{ii) の考察}) \\ &= \int_0^\pi \sin\theta \cdot \frac{1}{\theta'(x)}d\theta - \int_\pi^{2\pi} \sin\theta \cdot \frac{1}{\theta'(x)}d\theta \\ &= \int_0^\pi \sin\theta(1-\cos\theta)d\theta - \int_\pi^{2\pi} \sin\theta(1-\cos\theta)d\theta \quad (\because \text{i) の考察}) \\ &= \left[-\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^\pi - \left[-\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_\pi^{2\pi} \quad (\because \text{三角関数の倍角公式}) \\ &= \left\{\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} - \left\{\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)\right\} \\ &= 4 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) 4

(5)

導関数の定義より、極限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ が存在することを示せばよい。まず、

$f(x)=\sin(x+f(x))=\sin(\theta(x))$ を用いると

$$\begin{aligned} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} &= \frac{\sin(\theta(x+\Delta x))-\sin(\theta(x))}{\Delta x} \\ &= \frac{\sin(\theta(x+\Delta x))-\sin(\theta(x))}{\theta(x+\Delta x)-\theta(x)} \cdot \frac{\theta(x+\Delta x)-\theta(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

と変形できる。また、 $\Delta\theta=\theta(x+\Delta x)-\theta(x)$ とおき、 $\theta(x)=\theta$ と表すことにすると

$$\frac{\sin(\theta(x+\Delta x))-\sin(\theta(x))}{\theta(x+\Delta x)-\theta(x)} \cdot \frac{\theta(x+\Delta x)-\theta(x)}{\Delta x} = \frac{\sin(\theta+\Delta\theta)-\sin\theta}{\Delta\theta} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta x}$$

となり、ここで、 $\theta(x)$ の定義より

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \theta(x+\Delta x)-\theta(x) \\ &= \{(x+\Delta x)+f(x+\Delta x)\}-(x+f(x)) \\ &= \Delta x + \{f(x+\Delta x)-f(x)\} \\ \therefore \frac{\Delta\theta}{\Delta x} &= 1 + \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

であるから、これを用いることで

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\sin(\theta+\Delta\theta)-\sin\theta}{\Delta\theta} \left(1 + \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)$$

$$\therefore \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\sin(\theta+\Delta\theta)-\sin\theta}{1-\frac{\sin(\theta+\Delta\theta)-\sin\theta}{\Delta\theta}}$$

と変形できる。さらに、関数 $f(x)$ は $0 \leq x \leq 2\pi$ で連続であることから

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta\theta &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{\Delta x + \{f(x+\Delta x)-f(x)\}\} \\ &= 0 + f(x)-f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、三角関数の和積公式より

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\theta+\Delta\theta)-\sin\theta}{\Delta\theta} &= \frac{2\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\cos\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\Delta\theta} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\frac{\Delta\theta}{2}} \cdot \cos\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

と変形できるから、最終的に

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\frac{\Delta\theta}{2}} \cdot \cos\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{1-\frac{\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\frac{\Delta\theta}{2}} \cdot \cos\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\frac{\Delta\theta}{2}} \cdot \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \cos\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{1-\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\frac{\Delta\theta}{2}} \cdot \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \cos\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{\cos\theta}{1-\cos\theta} \end{aligned}$$

と計算できる。したがって、極限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ は存在するから、 $f(x)$ は $0 < x < 2\pi$ に

おいて微分可能であることが示された。

(証明終)