

[2]

(1)

与えられた四面体は正四面体であるので、 $\triangle ABC$ の重心を G とおくと、 $\triangle ABC$ と線分 OG

は直交している。よって、 $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{OG}$ は平行であり、 $\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$ であるから、

$\overrightarrow{PQ} = \frac{k}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ と表せる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PQ} \\ &= \overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{PQ} \\ &= \vec{c} + t(x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) + \frac{k}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ &= \left(\frac{k}{3} + tx\right)\vec{a} + \left(\frac{k}{3} + ty\right)\vec{b} + \left(1 + \frac{k}{3} - t\right)\vec{c}\end{aligned}$$

となる。ここで、点 Q は $\triangle ABC$ の内部にあるので、

$$\begin{aligned}\frac{k}{3} + tk + \frac{k}{3} + ty + 1 + \frac{k}{3} - t &= 1 \\ \therefore k &= t(1 - x - y)\end{aligned}$$

である。よって、

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{t(1-x-y)}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

である。同様に、 $\triangle OBC$ の重心を H とおくと、 $\triangle OBC$ と線分 AH は直交している。よって、

$\overrightarrow{PR}$ と $\overrightarrow{AH}$ は平行であり、 $\overrightarrow{AH} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3} - \vec{a}$ であるから、 $\overrightarrow{PR} = \frac{l}{3}(\vec{b} + \vec{c} - 3\vec{a})$ とおくと、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PR} \\ &= \vec{c} + t(x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) + \frac{l}{3}(\vec{b} + \vec{c} - 3\vec{a}) \\ &= (-l + tx)\vec{a} + \left(\frac{l}{3} + ty\right)\vec{b} + \left(1 + \frac{l}{3} - t\right)\vec{c}\end{aligned}$$

となる。点 R は $\triangle OBC$ の内部にあるので、

$$\begin{aligned}-l + tx &= 0 \\ \therefore l &= tx\end{aligned}$$

である。よって、

$$\overrightarrow{PR} = \frac{tx}{3}(\vec{b} + \vec{c} - 3\vec{a})$$

となる。

$$(答) \quad \overrightarrow{PQ} = \frac{t(1-x-y)}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}), \quad \overrightarrow{PR} = \frac{tx}{3}(\vec{b} + \vec{c} - 3\vec{a})$$

(2)

(1)より、線分 OG と線分 PQ は平行であるので、正四面体 $OABC$ と四面体 $PABC$ との体積比は線分 OG と線分 PQ の長さの比と同じである。ここで、(1)の結果より

$$OG : PQ = 1 : t(1-x-y)$$

であるから、四面体 $PABC$ の体積は $t(1-x-y)V$ である。

$$(答) \quad t(1-x-y)V$$

(3)

(2)と同様にして、四面体 $POBC$ の体積は txV である。また、 $CD : PD = 1 : (1-t)$ であることから、四面体 $POAB$ の体積は $(1-t)V$ である。よって、点 D が $\triangle OAB$ の内部の点であることから、

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ 0 < x + y < 1 \end{cases}$$

より $y \neq 2$ であることに注意すると、2つの四面体 $PABC$ 、 $POBC$ の体積の和が四面体 $POAB$ の体積と等しいとき、

$$\begin{aligned}t(1-x-y)V + txV &= (1-t)V \\ \Leftrightarrow t(2-y) &= 1 \\ \therefore t &= \frac{1}{2-y}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad t = \frac{1}{2-y}$$

[3]

(1)

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

であるから、約数の個数は、

$$(3+1)(2+1)(1+1) = 24$$

である。

(答) 24

(2)

求めるのは、6枚のカードを並べる方法の総数と同じであるから、

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 2} = 60 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 60通り

(3)(i)

$$4 = 2^2, 6 = 2 \times 3$$

であるから、

$$\begin{aligned} X &= 2^{k_2} \times 3^{k_3} \times 4^{k_4} \times 5^{k_5} \times 6^{k_6} \\ &= 2^{k_2+2k_4+k_6} \times 3^{k_3+k_6} \times 5^{k_5} \end{aligned}$$

と素因数分解できる。よって、(1)と同様に考えることで

$$Y = (k_2 + 2k_4 + k_6 + 1)(k_3 + k_6 + 1)(k_5 + 1)$$

となる。

(答) $Y = (k_2 + 2k_4 + k_6 + 1)(k_3 + k_6 + 1)(k_5 + 1)$

(ii)

$$7500 = 2^2 \times 3 \times 5^4$$

であるので、 X が7500となるための条件は、

$$\begin{cases} k_2 + 2k_4 + k_6 = 2 \\ k_3 + k_6 = 1 \\ k_5 = 4 \\ k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 = 6 \end{cases}$$

である。よって、 $X = 7500$ となるのは

$$(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6) = (0, 1, 0, 0, 4, 1), (0, 0, 1, 1, 4, 0)$$

のいずれかの場合であるから、求めるサイコロの目の出方は

$$({}_6C_1 \times {}_5C_1) \times 2 = 60 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 60通り

(iii)

背理法を利用して、 $k_2 = k_3 = k_4 = 0$ であることを示す。すなわち、 $k_2 \neq 0$ 、 $k_3 \neq 0$ 、 $k_4 \neq 0$ を仮定した場合に矛盾が生じることを順次導く。ここで、 $Y = m$ を満たす場合に、

$$(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6) = (l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6)$$

が成り立つとする。このとき、

$$m = (l_2 + 2l_4 + l_6 + 1)(l_3 + l_6 + 1)(l_5 + 1)$$

である。

[1] $l_2 \neq 0$ と仮定するとき

$(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6) = (l_1, l_2 - 1, l_3, l_4, l_5, l_6 + 1)$ となる場合の Y を考えると、

$$\begin{aligned} m - Y &= (l_2 + 2l_4 + l_6 + 1)(l_3 + l_6 + 1)(l_5 + 1) - (l_2 - 1 + 2l_4 + l_6 + 1 + 1)(l_3 + l_6 + 1 + 1)(l_5 + 1) \\ &= -(l_2 + 2l_4 + l_6 + 1)(l_5 + 1) \\ &< 0 \end{aligned}$$

となり、 m が Y のとりうる最大の値であることに矛盾する。したがって、 $l_2 = 0$ である。

[2] $l_3 \neq 0$ と仮定するとき

$(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6) = (l_1, l_2, l_3 - 1, l_4, l_5, l_6 + 1)$ となる場合の Y を考えると、

$$\begin{aligned} m - Y &= (l_2 + 2l_4 + l_6 + 1)(l_3 + l_6 + 1)(l_5 + 1) - (l_2 + 2l_4 + l_6 + 1 + 1)(l_3 - 1 + l_6 + 1 + 1)(l_5 + 1) \\ &= -(l_3 + l_6 + 1)(l_5 + 1) \\ &< 0 \end{aligned}$$

となり、 m が Y のとりうる最大の値であることに矛盾する。したがって、 $l_3 = 0$ である。

[3] $l_4 \neq 0$ と仮定するとき

$(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6) = (l_1, l_2, l_3, l_4 - 1, l_5, l_6 + 1)$ となる場合の Y を考える。ここで、[1], [2]の結果から $l_2 = 0$ 、 $l_3 = 0$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} m - Y &= (l_2 + 2l_4 + l_6 + 1)(l_3 + l_6 + 1)(l_5 + 1) - (l_2 + 2l_4 - 2 + l_6 + 1 + 1)(l_3 + l_6 + 1 + 1)(l_5 + 1) \\ &= (2l_4 + l_6 + 1)(l_6 + 1)(l_5 + 1) - (2l_4 + l_6)(l_6 + 2)(l_5 + 1) \\ &= (l_5 + 1)(-2l_4 + 1) \\ &< 0 \end{aligned}$$

となり、 m が Y のとりうる最大の値であることに矛盾する。したがって、 $l_4 = 0$ である。

以上[1], [2], [3]より、 $Y = m$ のとき、 $k_2 = k_3 = k_4 = 0$ である。

(証明終)

(iv)

(iii)の結果より、 $Y = m$ のとき $k_5 + k_6 = 6$ であり、

$$Y = (k_6 + 1)^2 (k_5 + 1) = (k_6 + 1)^2 (7 - k_6)$$

である。よって、 k_6 と Y の組み合わせとして、

$$(k_6, Y) = (0, 7), (1, 24), (2, 45), (3, 64), (4, 75), (5, 72), (6, 49)$$

が考えられ、 $(k_5, k_6) = (2, 4)$ のときに Y は最大値75をとることが分かる。この場合のサイコロの目の出方は

$${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 15通り