

【1】

【解答】

- (1) $\left(\begin{array}{cc} a = \frac{3}{2} & b = \frac{1}{2} \end{array} \right)$
- (2) $\left(\begin{array}{cc} \overline{AB} \cdot \overline{BC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} & PQ = \frac{1}{3} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} \end{array} \right)$
- (3) $\left(\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{9}{10}\pi \end{array} \right)$
- (4) $\left(\begin{array}{c} \frac{e^3}{3} - \frac{e^2}{2} + e - \frac{17}{6} \end{array} \right)$
- (5) $\left(\begin{array}{c} \sqrt{17} - 2\sqrt{2} \end{array} \right)$
- (6) $\left(\begin{array}{c} \frac{1}{2}(3n+1)(3n^2 - n + 2) \end{array} \right)$

【解説】

(1)

与えられた式は,

$$\begin{aligned} \sqrt{2-\sqrt{3}} &= \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

と変形されるから, $a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$ となる。

(2)

$|\overline{BC}|^2 = |\overline{AB} - \overline{AC}|^2 = |\overline{AB}|^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} + |\overline{AC}|^2$ より,

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{AC} &= \frac{|\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 - |\overline{BC}|^2}{2} \\ &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \end{aligned}$$

となる。また, $\overline{AP} = \frac{2}{3}\overline{AB}, \overline{AQ} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AC}$ より,

$$\begin{aligned} |\overline{PQ}|^2 &= |\overline{AQ} - \overline{AP}|^2 \\ &= \left| -\frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AC} \right|^2 \\ &= \frac{1}{9}|\overline{AB}|^2 - \frac{4}{9}\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \frac{4}{9}|\overline{AC}|^2 \\ &= \frac{1}{9}c^2 - \frac{4}{9}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}\right) + \frac{4}{9}b^2 \\ &= \frac{1}{9}(2a^2 + 2b^2 - c^2) \end{aligned}$$

となるから, $|\overline{PQ}| > 0$ より,

$$|\overline{PQ}| = \frac{1}{3}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

と求められる。

(3)

与えられた方程式は,

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \cos 2x \\ \Leftrightarrow \sin 3x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \end{aligned}$$

と変形されるから, x は整数 k, l を用いて,

$$\begin{aligned} 3x &= \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi, 3x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 2l\pi \\ \Leftrightarrow x &= \frac{4k+1}{10}\pi, \frac{4l+1}{2}\pi \end{aligned}$$

と表される。したがって, x が $0 \leq x \leq \pi$ を満たすような k, l は $k=0, 1, 2, l=0$ であるから,

求める x の値は, $x = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{10}$ と求められる。

(4)

与えられた定積分は,

$$\int_1^e (\log x - x)^2 dx = \int_1^e \left\{ (\log x)^2 - 2x \log x + x^2 \right\} dx$$

と変形され, さらに,

$$\begin{aligned} \int_1^e (\log x)^2 dx &= \int_1^e (x)' (\log x)^2 dx \\ &= \left[x (\log x)^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \log x dx \\ &= e - 2 \left[x \log x - x \right]_1^e \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^e 2x \log x dx &= \int_1^e (x^2)' \log x dx \\ &= \left[x^2 \log x \right]_1^e - \int_1^e x dx \\ &= e^2 - \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e \\ &= e^2 - \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{e^2 + 1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^e x^2 dx &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^e \\ &= \frac{e^3 - 1}{3} \end{aligned}$$

であるから, 求める定積分の値は,

$$\begin{aligned} \int_1^e (\log x - x)^2 dx &= \int_1^e (\log x)^2 dx - \int_1^e 2x \log x dx + \int_1^e x^2 dx \\ &= e - 2 - \frac{e^2 + 1}{2} + \frac{e^3 - 1}{3} \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{e^2}{2} + e - \frac{17}{6} \end{aligned}$$

となる。

(5)

与えられた方程式は,

$$\begin{aligned} |2iz + 6| &= |z - 3| \\ \Leftrightarrow 2|z - 3i| &= |z - 3| \\ \Leftrightarrow 4|z - 3i|^2 &= |z - 3|^2 \\ \Leftrightarrow 4(z - 3i)(\bar{z} + 3i) &= (z - 3)(\bar{z} - 3) \\ \Leftrightarrow z\bar{z} + (1 + 4i)z + (1 - 4i)\bar{z} + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (z + 1 - 4i)(\bar{z} + 1 + 4i) &= 8 \\ \Leftrightarrow |z + 1 - 4i|^2 &= 8 \\ \Leftrightarrow |z - (-1 + 4i)| &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

と変形できるから, この方程式を満たす複素数 z の集合は複素数平面上において, 点 $(-1 + 4i)$ (以下点 A とする) を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円を表す。したがって, 原点 O がこの円の外部にあることから, $|z|$ の最小値は,

$$OA - 2\sqrt{2} = \sqrt{17} - 2\sqrt{2}$$

と求められる。

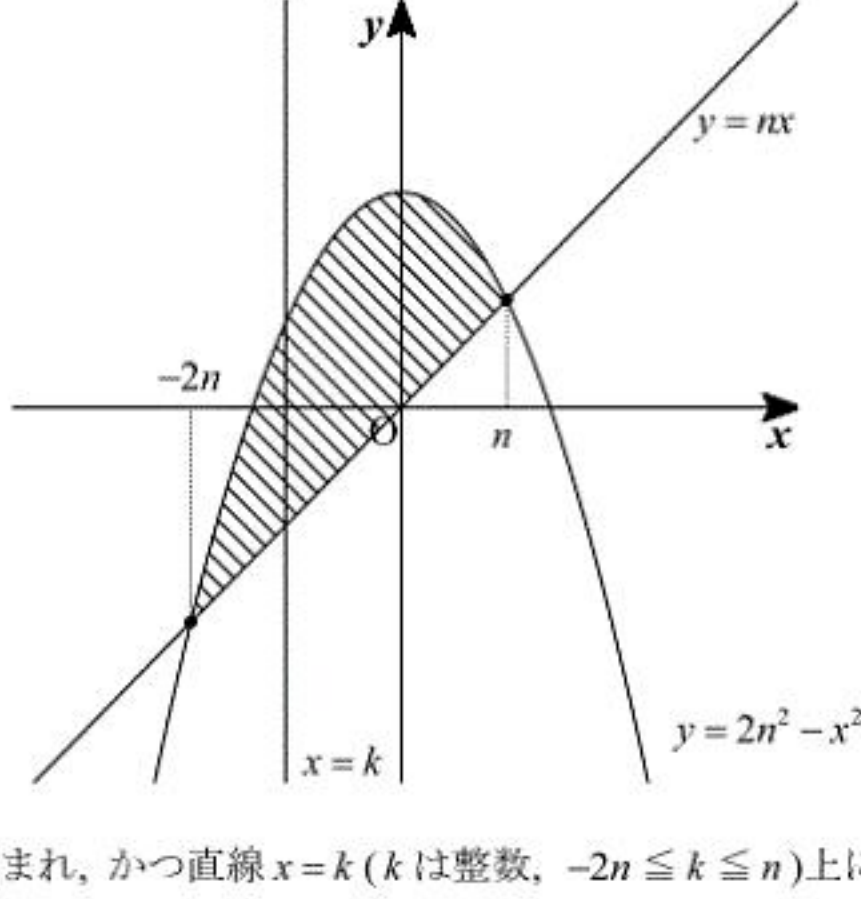
(6)

直線 $y = nx$ と放物線 $y = 2n^2 - x^2$ の交点の x 座標は,

$$\begin{aligned} nx &= 2n^2 - x^2 \\ \Leftrightarrow (x - n)(x + 2n) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -2n, n \end{aligned}$$

と求められるから, 交点の座標は $(-2n, -2n^2), (n, n^2)$ である。したがって, 与えられた不等式

を満たす領域は以下の斜線部分である。(境界を含む。)



ここで, この領域に含まれ, かつ直線 $x = k$ (k は整数, $-2n \leq k \leq n$) 上にある格子点の個数

は, $2n^2 - k^2 - nk + 1 = 1 + 3n(k + 2n) - (k + 2n)^2$ であるから, 求める格子点の個数は,

$$\begin{aligned} \sum_{k=-2n}^n (2n^2 - k^2 - nk + 1) &= \sum_{k=-2n}^n \{1 + 3n(k + 2n) - (k + 2n)^2\} \\ &= 3n + 1 + 3n \sum_{k=-2n}^n (k + 2n) - \sum_{k=-2n}^n (k + 2n)^2 \\ &= 3n + 1 + 3n \sum_{k=0}^{3n} k - \sum_{k=0}^{3n} k^2 \\ &= 3n + 1 + 3n \cdot \frac{1}{2}(3n + 1)3n - \frac{1}{6}3n(3n + 1)\{2(3n) + 1\} \\ &= \frac{1}{2}(3n + 1)(3n^2 - n + 2) \end{aligned}$$

と求められる。

[2]

(1)

$f(x) = x^3 - 6x$ が与えられたとき、 $f'(x) = 3x^2 - 6$ より、 $C: y = f(x)$ の点 $(a_1, f(a_1))$ における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y - f(a_1) &= f'(a_1)(x - a_1) \\ \Leftrightarrow y - (a_1^3 - 6a_1) &= (3a_1^2 - 6)(x - a_1) \\ \Leftrightarrow y &= (3a_1^2 - 6)x - 2a_1^3 \end{aligned}$$

と求められ、直線 $y = 3x$ との交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} 3x &= (3a_1^2 - 6)x - 2a_1^3 \\ \Leftrightarrow 3(a_1^2 - 3)x &= 2a_1^3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2a_1^3}{3(a_1^2 - 3)} \quad (\because a_1 > \sqrt{3}) \end{aligned}$$

となるから、 $a_2 = \frac{2a_1^3}{3(a_1^2 - 3)}$ である。したがって、

$$\begin{aligned} a_2 - 3 &= \frac{2a_1^3}{3(a_1^2 - 3)} - 3 \\ &= \frac{(2a_1 + 3)(a_1 - 3)^2}{3(a_1^2 - 3)} \end{aligned}$$

より、 $a_1 > \sqrt{3}$ から $a_2 - 3 \geq 0$ となり、 $a_2 \geq 3$ が成立する。

(証明終)

(2)

$g(x) = \frac{2x^2 - 3x - 9}{3x^2 - 9}$ が与えられたとき、

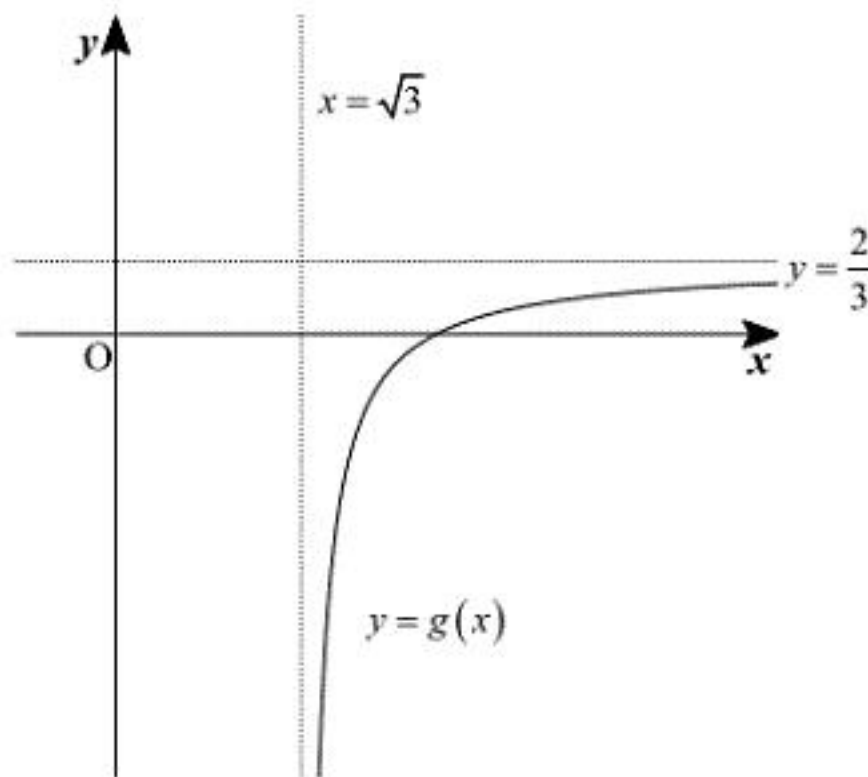
$$g(x) = \frac{2}{3} - \frac{x+1}{x^2-3}$$

$$g'(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x^2 - 3)^2} = \frac{(x+1)^2 + 2}{(x^2 - 3)^2} > 0$$

であることから、 $g(x)$ は $x > \sqrt{3}$ において単調増加する。さらに、

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}+0} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{2}{3}$$

であることから、求めるグラフは以下の通りである。



また、漸近線は $x = \sqrt{3}$, $y = \frac{2}{3}$ である。

グラフ:前図

(答) 漸近線: $x = \sqrt{3}$, $y = \frac{2}{3}$

(3)

$a_n \geq 3$ ($n \geq 2$) を帰納法を用いて示す。(1)と同様にして、 $C: y = f(x)$ の点 $(a_n, f(a_n))$ における接線と直線 $y = 3x$ との交点の x 座標 a_{n+1} は、

$$3(a_n^2 - 3)a_{n+1} = 2a_n^3$$

を満たす。よって $a_n \geq 3$ と仮定すると、

$$a_{n+1} = \frac{2a_n^3}{3(a_n^2 - 3)}$$

となり、同様に、

$$a_{n+1} - 3 = \frac{(2a_n + 3)(a_n - 3)^2}{3(a_n^2 - 3)} \quad \dots \textcircled{1}$$

となることから、 $a_{n+1} \geq 3$ が成立する。したがって、 $a_2 \geq 3$ と合わせて $a_n \geq 3$ ($n \geq 2$) が成立する。次に、

$$a_{n+1} - 3 \leq \frac{2}{3}(a_n - 3) \quad \dots \textcircled{2}$$

を示す。 $a_n = 3$ のとき、①より、 $a_{n+1} = 3$ であるから、②が成立する。 $a_n > 3$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1} - 3}{a_n - 3} &= \frac{(2a_n + 3)(a_n - 3)}{3(a_n^2 - 3)} \\ &= \frac{2a_n^2 - 3a_n - 9}{3(a_n^2 - 3)} \\ &= f(a_n) \end{aligned}$$

となり(2)より $f(a_n) < \frac{2}{3}$ となる。したがって、②が成立する。よって、

$$0 \leq a_{n+1} - 3 \leq \frac{2}{3}(a_n - 3)$$

が成立する。

(証明終)

(4)

(3)で示した不等式を繰り返し用いると $0 \leq a_n - 3 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} (a_2 - 3)$ が成立し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} (a_2 - 3) = 0$$

であることから、はさみうちの原理より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 3) = 0$ から $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ となり、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

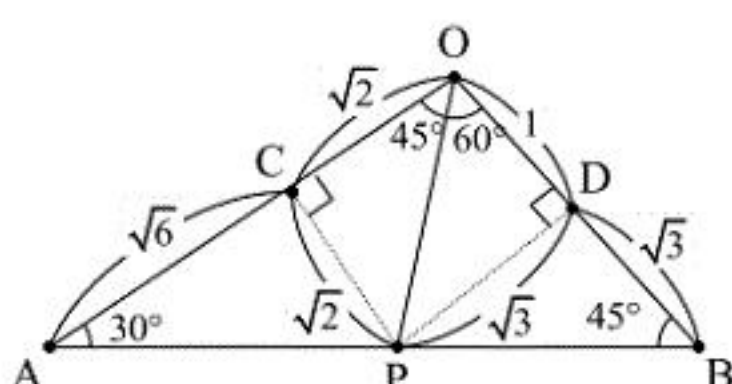
は存在する。

(証明終)

[3]

(1)

下図のように点Pから辺OA, OBにそれぞれ垂線の足C, Dを下ろすと $OC = \sqrt{2}$, $OD = 1$ となるから, $OC:OD = OA:OB = \sqrt{2}:1$ である。したがってCDとABは平行である。さらに, 四角形OCPDは円に内接し, 円周角の定理より, $\angle CPO = \angle ODC = 45^\circ$ となる。よってCDとABは平行であることから, $\angle DBP = \angle ODC = 45^\circ$ となり, $DP = DB = \sqrt{3}$ と求められる。ゆえに, $OB = OD + DB = 1 + \sqrt{3}$ である。



(答) $OB = 1 + \sqrt{3}$

(2)

$\triangle OAP$, $\triangle OBP$ にそれぞれ正弦定理を用いることにより,

$$R_1 = \frac{OP}{2\sin \angle OAP} = \frac{2}{2 \times \frac{1}{2}} = 2$$

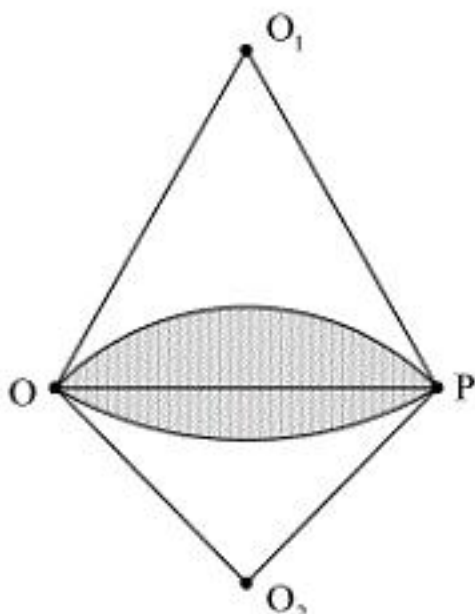
$$R_2 = \frac{OP}{2\sin \angle OBP} = \frac{2}{2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

と求められる。

(答) $R_1 = 2, R_2 = \sqrt{2}$

(3)

外接円 C_1, C_2 の中心をそれぞれ O_1, O_2 とおくと, 求める共通部分は以下の図の斜線部分である。



したがって, 円 C_1, C_2 に円周角の定理を用いて

$\angle OO_1P = 2\angle OAP = 60^\circ$, $\angle OO_2P = 2\angle OBP = 90^\circ$ となることから求める面積は,

$$S = \frac{1}{6}\pi R_1^2 - \frac{1}{2}R_1^2 \sin 60^\circ + \frac{1}{4}\pi R_2^2 - \frac{1}{2}R_2^2 \sin 90^\circ = \frac{7\pi}{6} - \sqrt{3} - 1$$

と求められる。

(答) $S = \frac{7\pi}{6} - \sqrt{3} - 1$

(4)

$O(-1, 0)$, $P(1, 0)$, $O_1(0, \sqrt{3})$, $O_2(0, -1)$ と座標を設定すると, 外接円 C_1, C_2 の方程式はそれぞれ,

$$C_1: x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 4$$

$$C_2: x^2 + (y + 1)^2 = 2$$

と表され, $-1 \leq x \leq 1$ のもとで, C_1 の $y \leq 0$ の部分, C_2 の $y \geq 0$ の部分の方程式はそれぞれ,

$$C_1: y = \sqrt{3} - \sqrt{4 - x^2}$$

$$C_2: y = -1 + \sqrt{2 - x^2}$$

と表される。ここで,

$$\begin{aligned} \left| -1 + \sqrt{2 - x^2} \right| - \left| \sqrt{3} - \sqrt{4 - x^2} \right| &= \sqrt{2 - x^2} - \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{3} - 1 \\ &= \sqrt{3} - 1 - \frac{2}{\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{4 - x^2}} \end{aligned}$$

であり, $-1 \leq x \leq 1$ より, $\left| -1 + \sqrt{2 - x^2} \right| - \left| \sqrt{3} - \sqrt{4 - x^2} \right| \geq \sqrt{3} - 1 - \frac{2}{\sqrt{2 - 1^2} + \sqrt{4 - 1^2}} = 0$ となる。

したがって, $\left| -1 + \sqrt{2 - x^2} \right| \geq \left| \sqrt{3} - \sqrt{4 - x^2} \right|$ となるから, 求める体積は,

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 \pi \left(-1 + \sqrt{2 - x^2} \right)^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 \pi \left\{ (1 - x^2) - 2(-1 + \sqrt{2 - x^2}) \right\} dx \\ &= \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx - 2\pi \int_{-1}^1 (-1 + \sqrt{2 - x^2}) dx \\ &= \pi \cdot \frac{1}{6} \{ 1 - (-1) \}^3 - 2\pi \left(\frac{1}{4}\pi R_2^2 - \frac{1}{2}R_2^2 \sin 90^\circ \right) \\ &= \left(\frac{10}{3} - \pi \right) \pi \end{aligned}$$

と求められる。

(答) $V = \left(\frac{10}{3} - \pi \right) \pi$