

〔2〕

(1)

$\triangle ABC$ を含む平面は $x+y+z=6$ で表されることから、この平面に垂直な直線 PH はベクトル $(1, 1, 1)$ と並行である。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PH} \\ &= (t, t, 1) + a(1, 1, 1) \\ &= (t+a, t+a, 1+a)\end{aligned}$$

と表すことができる。点 H は平面 $x+y+z=6$ 上にあることから、

$$(t+a) + (t+a) + (1+a) = 6 \Leftrightarrow a = \frac{5-2t}{3}$$

であり、点 H の座標は $\left(\frac{5+t}{3}, \frac{5+t}{3}, \frac{8-2t}{3}\right)$ となる。一方、 $\overrightarrow{CA} = 6(1, 0, -1)$ であることから、点 P を通る辺 CA に垂直な平面を表す式は、

$$1 \cdot (x-t) + 0 \cdot (y-t) + (-1) \cdot (z-1) = 0 \Leftrightarrow x-z = t-1$$

である。この平面と辺 CA、つまり、 $0 \leq x \leq 6$ における、平面 $x-z = t-1$ と

$$\begin{cases} x+z=6 \\ y=0 \end{cases}$$

の共有点が点 Q になることから、 $0 < t < \frac{5}{2}$ を踏まえると、点 Q の座標は $\left(\frac{5+t}{2}, 0, \frac{7-t}{2}\right)$ となる。

また、 $\overrightarrow{CB} = 6(0, 1, -1)$ であることから、点 P を通る辺 CB に垂直な平面を表す式は、

$$0 \cdot (x-t) + 1 \cdot (y-t) - 1 \cdot (z-1) = 0 \Leftrightarrow y-z = t-1$$

である。この平面と辺 BC、つまり、 $0 \leq y \leq 6$ における、平面 $y-z = t-1$ と

$$\begin{cases} y+z=6 \\ x=0 \end{cases}$$

の共有点が点 R となることから、 $0 < t < \frac{5}{2}$ を踏まえると、点 R の座標は $\left(0, \frac{5+t}{2}, \frac{7-t}{2}\right)$ となる。

よって、 $|\overrightarrow{CQ}| = |\overrightarrow{CR}|$ となることから、対称性より、直線 QR に関して点 C と点 S が対称であるとき、線分 CS の中点は線分 QR の中点と等しい。線分 QR の中点は $\left(\frac{5+t}{4}, \frac{5+t}{4}, \frac{7-t}{2}\right)$ であることから、点 S の座標は、

$$2 \cdot \left(\frac{5+t}{4}, \frac{5+t}{4}, \frac{7-t}{2}\right) - (0, 0, 6) = \left(\frac{5+t}{2}, \frac{5+t}{2}, 1-t\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad H\left(\frac{5+t}{3}, \frac{5+t}{3}, \frac{8-2t}{3}\right), Q\left(\frac{5+t}{2}, 0, \frac{7-t}{2}\right), S\left(\frac{5+t}{2}, \frac{5+t}{2}, 1-t\right)$$

(2)

四面体 PQRS の底面を $\triangle QRS$ とすると、高さは線分 PH になる。対称性より $\triangle QRS \equiv \triangle QRC$ であることから、 $\triangle QRS$ と $\triangle QRC$ の面積は等しい。また、 $\triangle QRC$ は

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{CQ}| &= |\overrightarrow{CR}| = \sqrt{\left(\frac{5+t}{2}\right)^2 + \left(6 - \frac{7-t}{2}\right)^2} = \frac{5+t}{2} \cdot \sqrt{2} \\ \angle QCR &= 60^\circ\end{aligned}$$

をみたすことから正三角形である。よって、底面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5+t}{2} \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{5+t}{2} \cdot \sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{3}(5+t)^2}{8}$$

となる。一方、 $\overrightarrow{PH} = \frac{5-2t}{3}(1, 1, 1)$ であるから、高さは $\frac{5-2t}{3} \cdot \sqrt{3}$ である。よって、求める四面体の体積は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}(5+t)^2}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}(5-2t)}{3} = \frac{(5+t)^2(5-2t)}{24}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{(5+t)^2(5-2t)}{24}$$

(3)

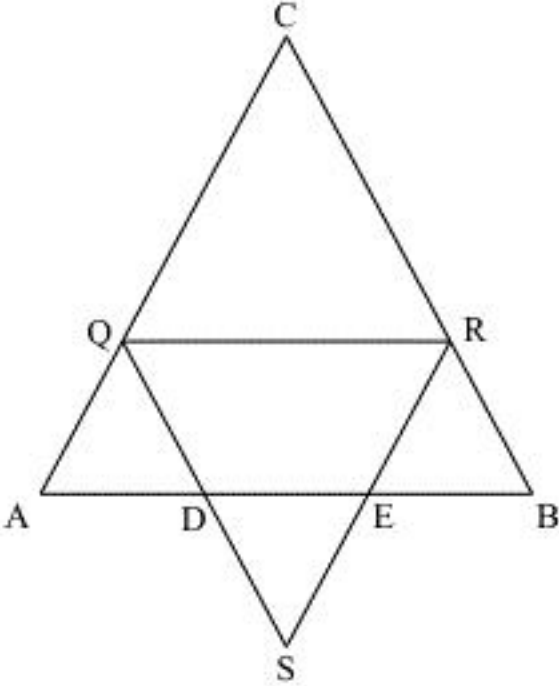
[1] $0 < t \leq 1$ のとき

$\frac{5+t}{2} \geq 0$ 、 $1-t \geq 0$ であることから、点 S は $\triangle ABC$ に含まれる。よって、四面体 PQRS は

四面体 PABC に含まれ、共通部分の体積は四面体 PQRS の体積 $\frac{(5+t)^2(5-2t)}{24}$ と一致する。

[2] $t > 1$ のとき

点 S は $\triangle ABC$ の外にある。よって、四面体 PQRS と四面体 PABC の共通部分は、 $\triangle QRS$ と $\triangle ABC$ の共通部分を底面とする高さ PH の四角錐である。ここで、直線 QS, RS と AB の交点をそれぞれ D, E とすると、下図より底面は台形 QDER である。



対称性より QD の長さは

$$QD = QA = AC - QC = 6\sqrt{2} - \frac{5+t}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{7-t}{2} \cdot \sqrt{2}$$

となることから、

$$DS = QS - QD = \frac{5+t}{2} \cdot \sqrt{2} - \frac{7-t}{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}(t-1)$$

となる。よって、 $\triangle DES$ の面積は $\triangle QRS$ の面積の

$$\left(\frac{DS}{QS}\right)^2 = \left\{ \frac{\sqrt{2}(t-1)}{\frac{5+t}{2} \cdot \sqrt{2}} \right\}^2 = \left(\frac{2t-2}{5+t}\right)^2$$

倍であるので、求める共通部分の体積は(2)の結果も用いて、

$$\frac{(5+t)^2(5-2t)}{24} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{2t-2}{5+t}\right)^2 \right\} = \frac{(5-2t)(1+t)(7-t)}{8}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} \frac{(5-2t)(5+t)^2}{24} & (0 < t \leq 1) \\ \frac{(5-2t)(1+t)(7-t)}{8} & \left(1 < t < \frac{5}{2}\right) \end{cases}$$

[3]

(1)

図より、面積を比べたときに $\triangle OAC < \text{扇形} OAC < \triangle OAB$ が成り立つ。

$$\triangle OAC = \frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x$$

$$\text{扇形} OAC = \frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot x = \frac{1}{2} x$$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x = \frac{1}{2} \tan x$$

であることから、 $\sin x < x < \tan x$ が成り立つ。よって、

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

となる。 $\lim_{x \rightarrow +0} \cos x = 1$ であることから、はさみうちの原理より

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

であることが示される。また、 $t = -x$ 置換をすることにより、

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

となる。よって、 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = 1$ であるから、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

となることが示される。

(証明終)

(2)

導関数の定義に従うと、

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \\ &= 1 \cdot \cos(x+0) \left(\because (1)\right) \\ &= \cos x \end{aligned}$$

となる。

(答) $\cos x$

【4】

(1)

$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \log x \ (x > 0)$ について、

$$y' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \log x + \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{2 - \log x}{2x\sqrt{x}}$$

であることから、増減表をかくと、

x	0	...	e^2	...
y'		+	0	-
y		↗		↘

となる。よって、 $y = \frac{1}{\sqrt{x}} \log x$ は $x = e^2$ のときに最大値、

$$\frac{1}{\sqrt{e^2}} \log e^2 = \frac{2}{e}$$

をとる。

(答) $\frac{2}{e}$

(2)

$y = x^{\frac{1}{x}} \ (x > 0)$ について、 $y > 0$ であることから両辺の対数をとると、

$$\log y = \frac{1}{x} \log x$$

となる。よって、両辺を x で微分すると、

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2} \log x + \frac{1}{x^2}$$

$$\therefore y' = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2} (1 - \log x)$$

となり、増減表をかくと、

x	(0)	...	e	...
y'		+	0	-
y		↗	$e^{\frac{1}{e}}$	↘

となる。ここで、

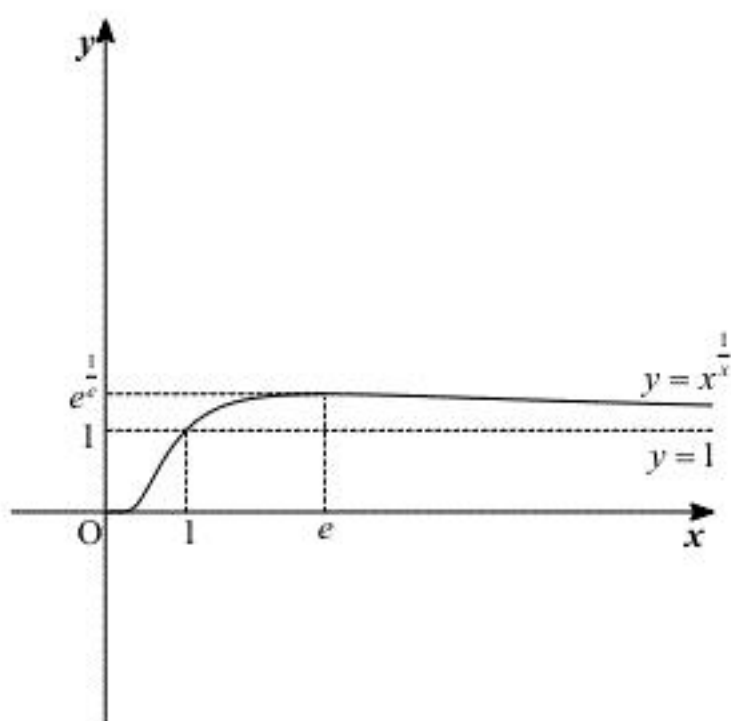
$$\lim_{x \rightarrow +0} \log y = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

であることより、

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$$

となる。以上より、 $y = x^{\frac{1}{x}}$ のグラフの概形は以下の図のようになり、漸近線は $y = 1$ になる。



(答) 前図

(3)

$a = 1$ のとき、すべての自然数 n について $a_n = 1$ が成り立つことから、

$$a \leq a_n \leq a_{n+1} \leq e$$

がすべての自然数 n について成り立つ。以下、 $1 < a \leq b = e^{\frac{1}{e}}$ であるとする。すると、 $a = x^{\frac{1}{x}}$ の

実数解は、 $y = a$ と $y = x^{\frac{1}{x}}$ の共有点の x 座標であることから、(2)のグラフを見ることで、

$\alpha, \beta \ (1 < \alpha \leq e \leq \beta)$ の2つ ($a = e^{\frac{1}{e}}$ のときは $\alpha = \beta = e$ の重解) が存在することが分かる。また、

$$a = x^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow x = a^x$$

であることより、 $\alpha = a^a$ である。まず、数学的帰納法を利用して、 $a \leq a_n < \alpha \cdots$ ①であることを示す。

[1] $n = 1$ のとき①が成り立つことを示す。

$a > 1$ より a^x は増加関数である。これと $1 < \alpha$ であることより、

$$a^1 < a^a = \alpha$$

となる。よって、 $a \leq a_1 = a < \alpha$ となり、 $n = 1$ のとき成り立つことが示される。

[2] $n = k$ (k は自然数) のとき①が成り立つと仮定するとき、 $n = k + 1$ のときにも①が成り立つことを示す。

$1 < a \leq a_k$ より、 $a^1 < a^{a_k} = a_{k+1}$ である。また、仮定より $a_k < \alpha$ であることから、

$$a_{k+1} = a^{a_k} < a^a = \alpha$$

となる。以上より、 $a \leq a_{k+1} < \alpha$ となり、 $n = k + 1$ のときも成り立つことが示される。

以上[1], [2]より、すべての自然数 n について $a \leq a_n < \alpha$ であることが示された。 $\alpha \leq e$ であるから、 $a \leq a_n < e$ となる。また、 $1 < a_n < \alpha$ であることと、(2)のグラフより $1 < x < \alpha$ のときに

$x^{\frac{1}{x}} < a \Leftrightarrow x < a^x$ であることから、

$$a_n < a^{a_n} = a_{n+1}$$

となることがわかる。以上より、すべての自然数 n について $a \leq a_n \leq a_{n+1} \leq e$ であることが示された。

(証明終)

(4)

極限值 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \left(= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \right)$ が存在することは仮定してよいことから、 $a_{n+1} = \left(\sqrt{2} \right)^{a_n}$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2} \right)^{a_n}$$

$$\Leftrightarrow l = \left(\sqrt{2} \right)^l$$

$$\therefore l^{\frac{1}{l}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

となる。(3)よりすべての自然数 n について $a \leq a_n \leq e$ であることから、 $1 < \sqrt{2} \leq l \leq e$ である。

(2)のグラフより、 $l^{\frac{1}{l}} = 2^{\frac{1}{2}}$ をみたす l は $1 < l \leq e$ の範囲では一つしか存在しない。 $l = 2$ は

$l^{\frac{1}{l}} = 2^{\frac{1}{2}}$ をみたすことから、 $l = 2$ と一意に決まる。

(答) $l = 2$