

数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学B

(情報科学教育, 数理科学系教育)

I 二つの正の数 a, b に対し, xy 平面上の 2 点を $A(0, a), B(b, 0)$ とし, 線分 AB の長さを $\frac{3}{2}$ とする。線分 AB を $2 : 1$ に内分する点 C を通り, 線分 AB に垂直な直線上に点 C からの長さが $\sqrt{3}$ である点を D とし, その座標を (x, y) とする。ただし, 点 D の x 座標は点 C の x 座標より大きいとする。

- (1) 点 C の座標を求めなさい。
- (2) 点 D の座標 (x, y) を a, b を用いて表しなさい。
- (3) x と y の関係を a, b を用いないで表しなさい。

II

原点 O を中心とする単位円上を動く点 P , Q がある。点 P は $A(1, 0)$ から出発して 4 秒間に 1 回の割合で正の向き(反時計回り)に回転する。点 Q は点 A から出発して 12 秒間に 1 回の割合で負の向きに回転する。ただし, それぞれの点は点 A から同時に出発し, 6 秒間動くとする。次の問いに答えなさい。

- (1) 動き始めてから t 秒後の点 P , Q の座標を t を用いて表しなさい。
- (2) $\triangle OAP$ と $\triangle OQA$ の面積の和を S とする。 S を t を用いて表しなさい。
- (3) $\triangle OAP$ と $\triangle OQA$ の面積が等しくなる時刻 t を求めなさい。

Ⅲ O を原点とする複素数平面において異なる 2 点 A, B を表す複素数をそれぞれ α, β とする。点 A, B は原点とは異なる。 $\triangle OAB$ が正三角形であるならば $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 0$ が成立し、 $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 0$ が成立すれば $\triangle OAB$ は正三角形であることを証明しなさい。

IV

a が $\frac{2}{\pi} < a < 1$ を満たす範囲を動くとき、次の問いに答えなさい。

(1) 区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ において $y = a \sin x$ と $y = \frac{2x}{\pi}$ が 1 点で交わることを示しなさい。

(2) 区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ において曲線 $y = a \sin x$ と直線 $y = \frac{2x}{\pi}$ で囲まれる図形の面積が最小となる a を求めなさい。

V $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ とする。積分が面積に対応することを利用して、積分の値を近似的に求めたい。区間 $[a, b]$ を n 等分して分割した 1 つの小区間 $[x_i, x_{i+1}]$ について、 $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ を $(x_i, f(x_i)), (x_i, 0), (x_{i+1}, 0), (x_{i+1}, f(x_i))$ を 4 頂点とする長方形の面積で近似する。

- (1) 区間 $[0, 1]$ を 5 等分し、それらの分点を小さいものから順に x_1, x_2, x_3, x_4 とする。これらの分点での $f(x)$ の値を小数第 3 位まで計算し、四捨五入して小数第 2 位まで求めなさい。
- (2) 区間 $[0, 1]$ を (1) のように 5 等分し、 $f(x)$ の区間 $[0, 1]$ での定積分の近似値を区分求積法により小数第 3 位まで計算し、四捨五入して小数第 2 位まで求めなさい。