

I

(1)

$$\begin{aligned}27 \cdot 3^{x^2} &= 81^x \\ \Leftrightarrow 3^3 \cdot 3^{x^2} &= (3^4)^x \\ \Leftrightarrow 3^{x^2+3} &= 3^{4x} \\ \Leftrightarrow x^2+3 &= 4x \\ \Leftrightarrow (x-1)(x-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1, 3\end{aligned}$$

となる。

(答) $x=1, 3$

(2)

$f(x) = (\log \sqrt{1+x})^2$ とするとき

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2(\log \sqrt{1+x})(\log \sqrt{1+x})' \\ &= 2(\log \sqrt{1+x}) \frac{1}{\sqrt{1+x}} (\sqrt{1+x})' \\ &= 2(\log \sqrt{1+x}) \frac{1}{\sqrt{1+x}} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{\log \sqrt{1+x}}{1+x}\end{aligned}$$

となる。

(答) $f'(x) = \frac{\log \sqrt{1+x}}{1+x}$

(3)

$$\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \cos 2x \right) dx = -\frac{1}{x} + \log|x| + \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

となる。ただし、 C は積分定数である。

(答) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \cos 2x \right) dx = -\frac{1}{x} + \log|x| + \frac{1}{2} \sin 2x + C$ (C は積分定数)

(4)

$$\begin{aligned}f(x) &= \sin x + \frac{1}{2} \cos 2x \\ &= \sin x + \frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2 x) \\ &= -\sin^2 x + \sin x + \frac{1}{2} \\ &= -\left(\sin x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

となる。 $-1 \leq \sin x \leq 1$ であることより、 $f(x)$ は

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ のとき最大値 } \frac{3}{4}$$

$$\sin x = 1 \text{ のとき最小値 } -\frac{3}{4}$$

をとる。

(答) 最大値 $\frac{3}{4}$, 最小値 $-\frac{3}{4}$

II

(1)

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_1 = 1, a_2 = 1$$

①に $n = 2$ を代入して,

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + a_1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。以下、同様にして①に $n = 3, 4, \dots, 8$ を順番に代入することで,

$$a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, a_7 = 13, a_8 = 21, a_9 = 34$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, a_7 = 13, a_8 = 21, a_9 = 34$$

(2)

自然数 n ($n \geq 2$) に対して

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = a_n a_{n+1} \quad \dots \textcircled{*}$$

が成り立つことを、数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n = 2$ のとき

②の左辺は $a_1^2 + a_2^2 = 2$, 右辺は $a_2 a_3 = 2$ となり成立する。

(ii) $n = k$ (k は 3 以上の自然数) のとき②が成立すると仮定する

このとき,

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 = a_k a_{k+1}$$

が成り立つ。 a_{k+1}^2 を加えると

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 + a_{k+1}^2 &= a_k a_{k+1} + a_{k+1}^2 \\ &= a_{k+1} (a_k + a_{k+1}) \\ &= a_{k+1} a_{k+2} \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

となり, $n = k+1$ のときも②は成立する。

以上(i), (ii)より, 自然数 n ($n \geq 2$) に対して②が成り立つことが示された。

(証明終)

Ⅲ

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \\ &= (t-a, 2t-b, 4t)\end{aligned}$$

である。 $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{OA}$ であることより

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OA} &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-a) \cdot 1 + (2t-b) \cdot 2 + 4t \cdot 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 21t &= a+2b \\ \Leftrightarrow t &= \frac{a+2b}{21}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{a+2b}{21}$$

(2)

線分 BC の長さは、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{(t-a)^2 + (2t-b)^2 + (4t)^2} \\ &= \sqrt{21t^2 - 2t(a+2b) + a^2 + b^2}\end{aligned}$$

と表せる。点 B は xy 平面上で原点を中心とする半径 1 の円上を動く点であるから、 $a^2 + b^2 = 1$ が成り立つ。また、(1)の結果より $a+2b=21t$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{21t^2 - 2t \cdot 21t + 1} \\ &= \sqrt{1-21t^2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{1-21t^2}$$

(3)

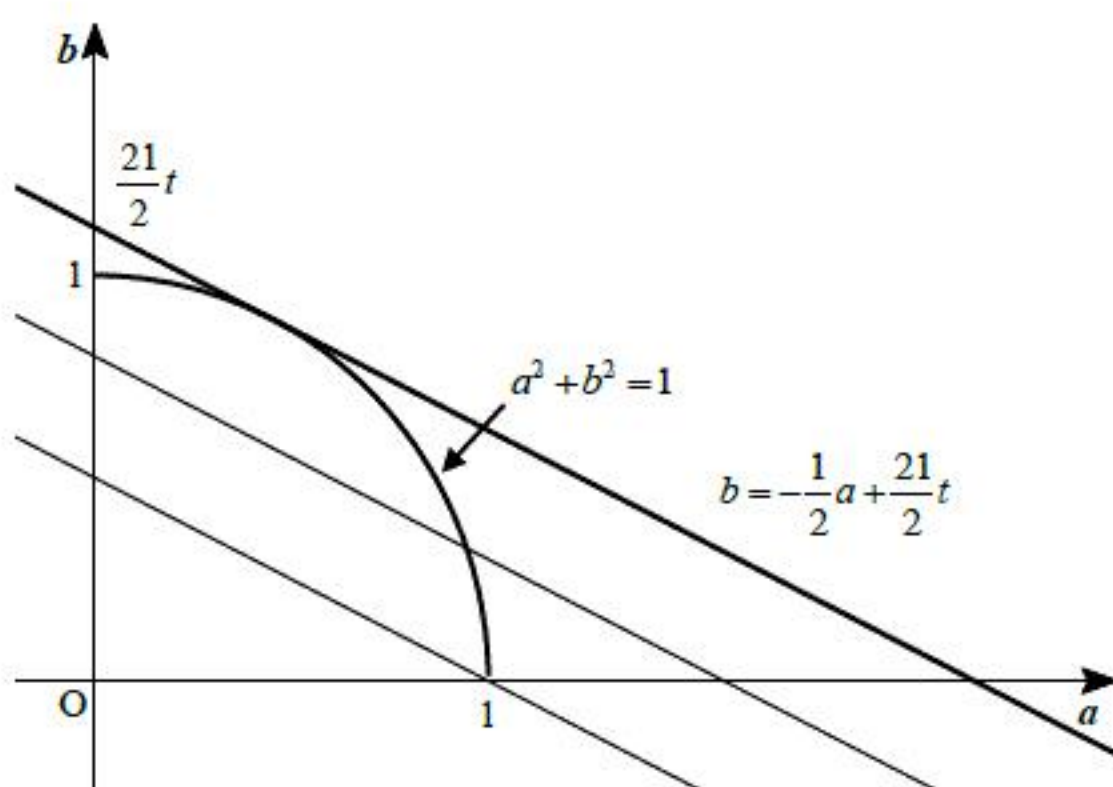
(2)の結果より、線分 BC の長さが最小値をとるのは t が最大値をとるときである。 t の存在条件について考える。

ある実数 t が存在する

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=21t \\ a^2+b^2=1 \\ a>0, b>0 \end{cases} \text{ のすべてを満たす実数の組 } (a, b) \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow ab \text{ 平面上の第一象限に直線 } b = -\frac{1}{2}a + \frac{21}{2}t \text{ と円 } a^2 + b^2 = 1 \text{ が共有点をもつ}$$

となる。これらの図形の位置関係は以下の図の通りとなる。



直線 $b = -\frac{1}{2}a + \frac{21}{2}t$ の b 切片が $\frac{21}{2}t$ であるから、 t が最大となるのは直線 $b = -\frac{1}{2}a + \frac{21}{2}t$ と円 $a^2 + b^2 = 1$ が共有点をもつなかで直線の b 切片が最大となるときであり、これは直線と円が接するときである。このとき原点と直線 $b = -\frac{1}{2}a + \frac{21}{2}t$ の距離が 1 となるから、点と直線の距離公式より

$$\begin{aligned}\frac{\left| -\frac{21}{2}t \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + 1^2}} &= 1 \\ \Leftrightarrow |t| &= \frac{\sqrt{5}}{21}\end{aligned}$$

となり、 $a, b > 0$ のとき $t = \frac{a+2b}{21}$ より $t > 0$ となることから、 t の最大値は $\frac{\sqrt{5}}{21}$ となる。したがって、求める線分 BC の長さの最小値は

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{1 - 21 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{21} \right)^2} \\ &= \frac{4\sqrt{21}}{21}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{4\sqrt{21}}{21}$$

IV

(1)

$f(x) = \frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}}$ ($x \geq 0$) とおく。 $f'(x) = \sqrt{x}$ より、 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $T(t, f(t))$ における

接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ &= \sqrt{t}x - \frac{1}{3}t\sqrt{t} \end{aligned}$$

となる。これが $y = px - q$ と一致するとき、

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{t} \\ q &= -\frac{1}{3}t\sqrt{t} \end{aligned}$$

が成り立つことから、 $t = p^2$ 、 $q = \frac{1}{3}p^3$ となる。よって、このときの接点 T の座標は

$\left(p^2, \frac{2}{3}p^3\right)$ となる。

(答) $T\left(p^2, \frac{2}{3}p^3\right)$, $q = \frac{1}{3}p^3$

(2)

$y = f(x)$ のグラフ上の曲線 OT の長さ $L(p)$ は

$$\begin{aligned} L(p) &= \int_0^{p^2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \\ &= \int_0^{p^2} \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2} dx \\ &= \int_0^{p^2} \sqrt{1+x} dx \\ &= \left[\frac{2}{3} |1+x|^{\frac{3}{2}} \right]_0^{p^2} \\ &= \frac{2}{3} (1+p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $L(p) = \frac{2}{3} (1+p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}$

(3)

(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} \frac{L(2p)}{L(p)} &= \frac{(1+4p^2)^{\frac{3}{2}} - 1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}} - 1} \\ &= \frac{(\sqrt{1+4p^2} - 1) \{ (1+4p^2) + \sqrt{1+4p^2} + 1 \}}{(\sqrt{1+p^2} - 1) \{ (1+p^2) + \sqrt{1+p^2} + 1 \}} \\ &= \frac{(\sqrt{1+4p^2} - 1)(2+4p^2 + \sqrt{1+4p^2})}{(\sqrt{1+p^2} - 1)(2+p^2 + \sqrt{1+p^2})} \cdot \frac{(\sqrt{1+4p^2} + 1)(\sqrt{1+p^2} + 1)}{(\sqrt{1+4p^2} + 1)(\sqrt{1+p^2} + 1)} \\ &= \frac{4p^2}{p^2} \cdot \frac{\sqrt{1+p^2} + 1}{\sqrt{1+4p^2} + 1} \cdot \frac{2+4p^2 + \sqrt{1+4p^2}}{2+p^2 + \sqrt{1+p^2}} \\ &= 4 \cdot \frac{\sqrt{1+p^2} + 1}{\sqrt{1+4p^2} + 1} \cdot \frac{2+4p^2 + \sqrt{1+4p^2}}{2+p^2 + \sqrt{1+p^2}} \end{aligned}$$

となる。よって求める値は、

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow +0} \frac{L(2p)}{L(p)} &= \lim_{p \rightarrow +0} \left(4 \cdot \frac{\sqrt{1+p^2} + 1}{\sqrt{1+4p^2} + 1} \cdot \frac{2+4p^2 + \sqrt{1+4p^2}}{2+p^2 + \sqrt{1+p^2}} \right) \\ &= 4 \cdot \frac{1+1}{1+1} \cdot \frac{2+1}{2+1} \\ &= 4 \end{aligned}$$

である。

(答) $\lim_{p \rightarrow +0} \frac{L(2p)}{L(p)} = 4$