I

(1)

原点と点$\mathrm{P}(x_0, y_0)$を通る直線の傾きは$\dfrac{y_0}{x_0}$であるから，点Pにおける接線の傾きは，これと直交する$-\dfrac{x_0}{y_0}$である。したがって，接線の方程式は，

$$y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$$
$$\Leftrightarrow y_0(y-y_0)=-x_0(x-x_0)$$
$$\Leftrightarrow x_0x+y_0y=x_0{}^2+y_0{}^2$$

となる。点Pが円上の点であることから，$x_0{}^2+y_0{}^2=4$が成り立つことに注意すれば，求める方程式は

$$x_0x+y_0y=4$$

となる。

(答) $x_0x+y_0y=4$

(2)

Q, Rの座標は$\mathrm{Q}\left(\dfrac{4}{x_0}, 0\right)$, $\mathrm{R}\left(0, \dfrac{4}{y_0}\right)$であるから，中点Mの座標は

$$(X, Y)=\left(\frac{2}{x_0}, \frac{2}{y_0}\right)$$

となる。したがって，

$$x_0=\frac{2}{X},\ y_0=\frac{2}{Y}$$

であり，これを$x_0{}^2+y_0{}^2=4$に代入して，

$$\left(\frac{2}{X}\right)^2+\left(\frac{2}{Y}\right)^2=4\Leftrightarrow\frac{1}{X^2}+\frac{1}{Y^2}=1$$

を得る。$x\neq0,\ y\neq0$より$-2<x_0<0,\ 0<x_0<2$であるから

$$-2<\frac{2}{X}<0,\ 0<\frac{2}{X}<2$$
$$\Leftrightarrow X<-1,\ 1<X$$

となる。よって求める軌跡は

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1\ (x<-1,\ 1<x)$$

である。

(答) $\mathrm{M}\left(\dfrac{2}{x_0}, \dfrac{2}{y_0}\right)$, 軌跡:$\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=1\ (x<-1,\ 1<x)$

(3)

$0<x_0<2,\ 0<y_0<2$であるから

$$0<\frac{2}{X}<2,\ 0<\frac{2}{Y}<2$$
$$\Leftrightarrow 1<X,\ 1<Y$$

となる。よって$\dfrac{1}{X^2}+\dfrac{1}{Y^2}=1$を変形すると

$$Y^2=\frac{X^2}{X^2-1}$$
$$\Leftrightarrow Y=X\left(X^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

であるから

$$\frac{dY}{dX}=\left(X^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}+X\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(X^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot2X\right\}$$
$$=\left(X^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}\left\{\left(X^2-1\right)-X^2\right\}$$
$$=-\left(X^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}$$

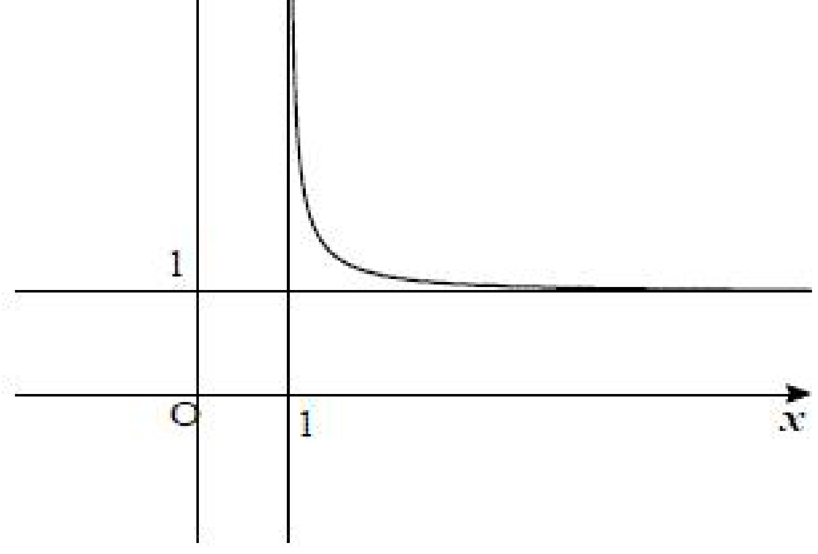
$$\frac{d^2Y}{dX^2}=-\left(-\frac{3}{2}\right)\left(X^2-1\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot2X$$
$$=3X\left(X^2-1\right)^{-\frac{5}{2}}$$

となる。$X>1$であるから，$\dfrac{dY}{dX}<0,\ \dfrac{d^2Y}{dX^2}>0$，また，

$$\lim_{X\to\infty}X\left(X^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}=\lim_{X\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{X^2}}}=1$$

$$\lim_{X\to1+0}X\left(X^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}=\infty$$

であるから，グラフは以下の通り。



(答) $\dfrac{dY}{dX}=-\left(X^2-1\right)^{-\frac{3}{2}},\ \dfrac{d^2Y}{dX^2}=3X\left(X^2-1\right)^{-\frac{5}{2}}$

グラフ:前図

Ⅱ

(1)

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\,dt &= \int_0^x te^{-t}\,dt \\ &= \left[-te^{-t}\right]_0^x - \int_0^x \left(-e^{-t}\right)dt \\ &= \left[-te^{-t} - e^{-t}\right]_0^x \\ &= -(x+1)e^{-x} + 1\end{aligned}$$

となる。

（答） $-(x+1)e^{-x}+1$

(2)

$$\begin{cases} S_n = \dfrac{1}{e} + \dfrac{2}{e^2} + \dfrac{3}{e^3} \cdots \dfrac{n}{e^n} \\ \dfrac{1}{e}S_n = \dfrac{1}{e^2} + \dfrac{2}{e^3} + \dfrac{3}{e^4} \cdots \dfrac{n-1}{e^n} + \dfrac{n}{e^{n+1}} \end{cases}$$

となるから，二式の辺々を引くと

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{e}\right)S_n &= \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots + \frac{1}{e^n} - \frac{n}{e^{n+1}} \\ &= \frac{\dfrac{1}{e}\left\{1-\left(\dfrac{1}{e}\right)^n\right\}}{1-\dfrac{1}{e}} - \frac{n}{e^{n+1}} \\ &= \frac{1-\left(\dfrac{1}{e}\right)^n}{e-1} - \frac{n}{e^{n+1}}\end{aligned}$$

$$\therefore S_n = \frac{e}{e-1}\left\{\frac{1-\left(\dfrac{1}{e}\right)^n}{e-1} - \frac{n}{e^{n+1}}\right\}$$

となる。

（答） $S_n = \dfrac{e}{e-1}\left\{\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{e}\right)^n}{e-1} - \dfrac{n}{e^{n+1}}\right\}$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{e}{e-1}\left\{\frac{1-\left(\dfrac{1}{e}\right)^n}{e-1} - \frac{n}{e^n}\cdot\frac{1}{e}\right\} \\ &= \frac{e}{e-1}\left(\frac{1-0}{e-1} - 0\cdot\frac{1}{e}\right) \\ &= \frac{e}{(e-1)^2}\end{aligned}$$

となる。

（答） $\dfrac{e}{(e-1)^2}$

III

(1)

$$
\begin{aligned}
g(x) &= A\sin 2x + B\cos 2x + C \\
&= 2A\sin x\cos x + B\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + C\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) \\
&= (C-B)\sin^2 x + 2A\sin x\cos x + (B+C)\cos^2 x
\end{aligned}
$$

となる。$x = 0, \dfrac{\pi}{2}$ を代入して，

$$c = B + C,\ a = C - B \qquad \cdots ①$$

となり，このとき，

$$b\sin x\cos x = 2A\sin x\cos x$$

となるから，$x = \dfrac{\pi}{4}$ を代入して，

$$b\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\therefore b = 2A \qquad \cdots ②$$

となることが必要である。逆に①，②をみたすとき，確かに

$$g(x) = A\sin 2x + B\cos 2x + C$$

が成り立つから，①，②を A, B, C について解いて，

$$A = \frac{b}{2},\ B = \frac{c-a}{2},\ C = \frac{c+a}{2}$$

を得る。

(答) $A = \dfrac{b}{2},\ B = \dfrac{c-a}{2},\ C = \dfrac{c+a}{2}$

(2)

三角関数の合成をすると，$0 \leqq \phi \leqq 2\pi$ として

$$g(x) = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(2x+\phi) + C \qquad \left(\sin\phi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \cos\phi \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$$

となる。ここで $-1 \leqq \sin(2x+\phi) \leqq 1$ であるから

$$\begin{cases} p = \sqrt{A^2+B^2} + C \\ q = -\sqrt{A^2+B^2} + C \end{cases}$$

となる。(1)より

$$\begin{cases} p = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{b^2 + (c-a)^2} + a + c\right) \\ q = \dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{b^2 + (c-a)^2} + a + c\right) \end{cases}$$

を得る。

(答) $\begin{cases} p = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{b^2 + (c-a)^2} + a + c\right) \\ q = \dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{b^2 + (c-a)^2} + a + c\right) \end{cases}$

(3)

(1), (2)より，$\dfrac{p+q}{2} = \dfrac{a+c}{2} = C$ となるから，

$$
\begin{aligned}
r &= \int_0^\pi \left| g(x) - \frac{p+q}{2} \right| dx \\
&= \int_0^\pi \left| A\sin 2x + B\cos 2x \right| dx \\
&= \int_0^\pi \sqrt{A^2+B^2}\left|\sin(2x+\phi)\right| dx
\end{aligned}
$$

となる。ここで，ϕ は(2)で定めたものとする。いま，$a = 2, b = 2, c = 1$ であるから，

$$A = 1,\ B = -\frac{1}{2},\ C = \frac{3}{2}$$

となり，したがって，

$$\sqrt{A^2+B^2} = \frac{\sqrt{5}}{2},\ \sin\phi = -\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\phi = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

となる。とくに，$\dfrac{3\pi}{2} < \phi < 2\pi$ であるから，$\sin(2x+\phi)$ の符号変化は

x	0	$\cdots$	$\dfrac{2\pi-\phi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{3\pi-\phi}{2}$	$\cdots$	π
$\sin(2x+\phi)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$

となるので

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^\pi \left|\sin(2x+\phi)\right| dx \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2}\left\{ -\int_0^{\frac{2\pi-\phi}{2}} \sin(2x+\phi)\,dx + \int_{\frac{2\pi-\phi}{2}}^{\frac{3\pi-\phi}{2}} \sin(2x+\phi)\,dx - \int_{\frac{3\pi-\phi}{2}}^{\pi} \sin(2x+\phi)\,dx \right\} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{4}\left\{ \Big[\cos(2x+\phi)\Big]_0^{\frac{2\pi-\phi}{2}} - \Big[\cos(2x+\phi)\Big]_{\frac{2\pi-\phi}{2}}^{\frac{3\pi-\phi}{2}} + \Big[\cos(2x+\phi)\Big]_{\frac{3\pi-\phi}{2}}^{\pi} \right\} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{4}\Big[(\cos 2\pi - \cos\phi) - (\cos 3\pi - \cos 2\pi) + \{\cos(2\pi+\phi) - \cos 3\pi\} \Big] \\
&= \sqrt{5}
\end{aligned}
$$

を得る。

(答) $\sqrt{5}$