

I

(1)

$S(n)-T(n)$ を計算すると

$$\begin{aligned} S(n)-T(n) &= \sum_{k=1}^{12n+3} k^2 - \sum_{k=1}^{12n+3} (2k-1) \\ &= \sum_{k=1}^{12n+3} (k^2 - (2k-1)) \\ &= \sum_{k=1}^{12n+3} (k-1)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{12n+2} k^2 \\ &= \frac{1}{6}(12n+2)(12n+3)(24n+5) \\ &= (6n+1)(4n+1)(24n+5) \end{aligned}$$

となる。

ここで、 $6n+1, 4n+1, 24n+5$ は正の奇数なので、それらの積も正の奇数である。

ゆえに $S(n)-T(n)$ は正の奇数である。

(証明終)

(2)

$z=t+u$ とおいたとき

$$\begin{array}{c|cc} t & -u & \rightarrow & 0 \\ \hline z & 0 & \rightarrow & u \end{array}$$

となる。また $t=z-u$ より

$$\frac{dt}{dz}=1 \quad \text{すなわち} \quad dt=dz$$

が成り立つ。

$t=z-u$ と置き換えると、与えられた式の左辺は

$$\begin{aligned} \int_{-u}^0 t \left\{ \frac{d}{dt} f(t+u) \right\} dt &= \int_0^u (z-u) \left\{ \frac{d}{dz} f(z) \right\} dz \\ &= \int_0^u z f'(z) dz - u \int_0^u f'(z) dz \end{aligned}$$

部分積分の公式より

$$\int_0^u z f'(z) dz = [z f(z)]_0^u - \int_0^u f(z) dz$$

が成り立つ。これを代入して

$$\begin{aligned} \int_0^u z f'(z) dz - u \int_0^u f'(z) dz &= [z f(z)]_0^u - \int_0^u f(z) dz - u [f(z)]_0^u \\ &= u f(u) - 0 \cdot f(0) - \int_0^u f(z) dz - u \{ f(u) - f(0) \} \\ &= u f(u) - \int_0^u f(z) dz - u f(u) + u f(0) \\ &= - \int_0^u f(z) dz + u f(0) \end{aligned}$$

と計算できる。したがって

$$\begin{aligned} - \int_0^u f(z) dz + u f(0) &= -e^{-u} \cos u + u f(0) - u + 1 \\ \therefore \int_0^u f(z) dz &= e^{-u} \cos u + u - 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \int_0^u f(z) dz = e^{-u} \cos u + u - 1$$

(3)

$P_1(x)$ を $x^2-(a+1)x+a$ で割った商を $Q_1(x)$

$P_2(x)$ を $x^2-(b-2)x-2b$ で割った商を $Q_2(x)$ とおく。

このとき

$$\begin{aligned} P_1(x) &= Q_1(x) \{ x^2 - (a+1)x + a \} + 2x + b \\ P_2(x) &= Q_2(x) \{ x^2 - (b-2)x - 2b \} + x - a \end{aligned}$$

とおくことができるので

$$\begin{aligned} P_1(a) &= Q_1(a) \{ a^2 - (a+1)a + a \} + 2a + b \\ &= 2a + b \\ P_2(b) &= Q_2(b) \{ b^2 - (b-2)b - 2b \} + b - a \\ &= b - a \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} P_1(a) &= 2P_2(b) \\ \Leftrightarrow 2a + b &= 2(b - a) \\ \Leftrightarrow 4a &= b \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 4a = b$$

II

(1)

n 段上る上り方を a_n 通りとすると、 $n \geq 4$ のとき、 a_n 通りの内、

最初に 1 段上る上り方は、 $n-1$ 段上る上り方に等しいので、 a_{n-1} 通り。

最初に 2 段上る上り方は、次は必ず 1 段上る事になることから、3 段上った所からの上り方、すなわち、 $n-3$ 段上る上り方に等しいため、 a_{n-3} 通り。

よって

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-3} \quad (n \geq 4)$$

が得られる。ここで、

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$$

より

$$a_4 = a_3 + a_1 = 3 + 1 = 4$$

$$a_5 = a_4 + a_2 = 4 + 2 = 6$$

となる。したがって、5 段上る上り方は 6 通りである。

(答) 6 通り

(2)

同様にして

$$a_6 = a_5 + a_3 = 6 + 3 = 9$$

$$a_7 = a_6 + a_4 = 9 + 4 = 13$$

$$a_8 = a_7 + a_5 = 13 + 6 = 19$$

$$a_9 = a_8 + a_6 = 19 + 9 = 28$$

$$a_{10} = a_9 + a_7 = 28 + 13 = 41$$

$$a_{11} = a_{10} + a_8 = 41 + 19 = 60$$

である。したがって 11 段上る上り方は 60 通りである。

(答) 60 通り

Ⅲ

(1)

曲線 $C: y = x^3 + 2ax^2 + bx$ ($x \geq 0$) と直線 $l: y = ax$ ($x \geq 0$) が原点以外で接する、という条件を

同値変形する。ここで、関数 $f(x)$ を $f(x) = (x^3 + 2ax^2 + bx) - ax$ とおくと

$$\begin{cases} f(t) = 0 \\ f'(t) = 0 \end{cases} \text{ を満たす実数 } t(>0) \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^3 + 2at^2 + (b-a)t = 0 \\ 3t^2 + 4at + (b-a) = 0 \end{cases} \text{ を満たす実数 } t(>0) \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + 2at + (b-a) = 0 \\ 3t^2 + 4at + (b-a) = 0 \end{cases} \text{ を満たす実数 } t(>0) \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + 2at + (b-a) = 0 \\ -2at - 2(b-a) = 0 \end{cases} \text{ を満たす実数 } t(>0) \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{a-b}{a}\right)^2 + 2a\left(\frac{a-b}{a}\right) + (b-a) = 0 \\ t = \frac{a-b}{a} \end{cases} \text{ を満たす実数 } t(>0) \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 + a - b)(a - b) = 0 \\ \frac{a-b}{a} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = a^2 + a \\ a < 0 \end{cases}$$

となる。また、直線 C と直線 l の共有点の個数は方程式 $f(x) = 0$ の解の個数と一致するから、ここで求めた条件を用いて、方程式 $f(x) = 0$ を変形すると

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2ax^2 + a^2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+a)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, -a \quad (\because a < 0)$$

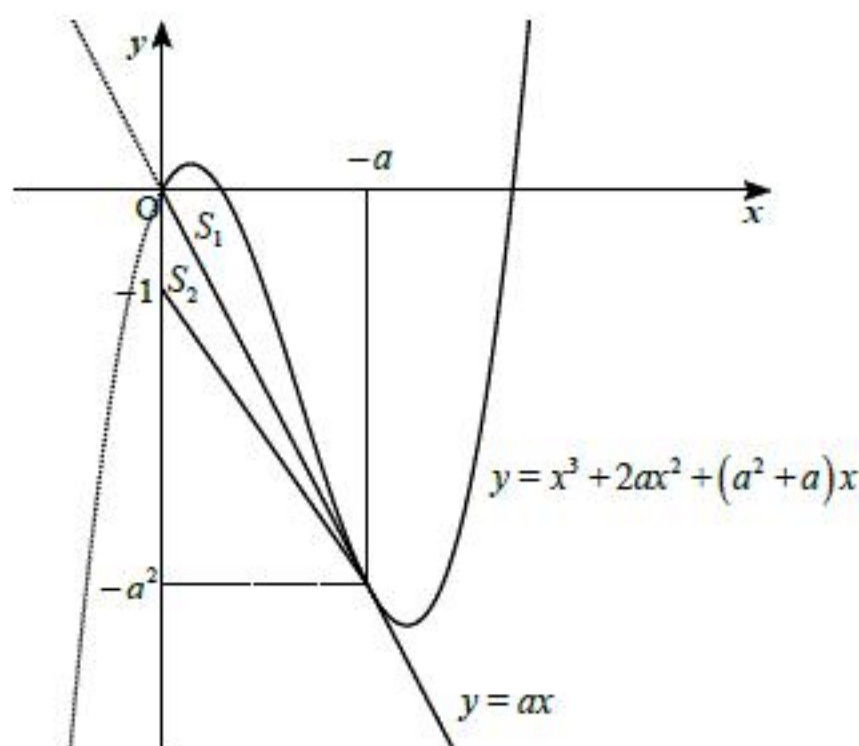
となるため、 $0 \neq -a$ より、直線 C と直線 l との共有点は二つあることが示された。

(証明終)

また、 a のとりうる値の範囲は $a < 0$ である。

(答) $a < 0$

(2)



上図より、 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{-a} (x^3 + 2ax^2 + (a^2 + a)x - ax) dx \\ &= \int_0^{-a} (x^3 + 2ax^2 + a^2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}ax^3 + \frac{a^2}{2}x^2 \right]_0^{-a} \\ &= \frac{1}{4}(-a)^4 + \frac{2}{3}a \cdot (-a)^3 + \frac{a^2}{2} \cdot (-a)^2 \\ &= \frac{a^4}{12} \end{aligned}$$

と計算できる。また、 S_2 は

$$S_2 = 1 \cdot (-a) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{a}{2}$$

であるから、 $S_1 = S_2$ となるのは

$$\begin{aligned} \frac{a^4}{12} &= -\frac{a}{2} \\ \Leftrightarrow a^3 + 6 &= 0 \quad (\because a \neq 0) \\ \Leftrightarrow a &= -6^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

を満たすときである。

(答) $a = -6^{\frac{1}{3}}$