

(1)

真数条件より,

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned} \log_8 2x &= \frac{\log_2 2x}{\log_2 8} \\ &= \frac{1}{3} \log_2 2x \\ &= \frac{1}{3} (1 + \log_2 x) \end{aligned}$$

であるため,

$$\begin{aligned} -2(\log_2 x)^2 + 9\log_8 2x &< 1 \\ \Leftrightarrow -2(\log_2 x)^2 + 3\log_2 x + 3 &< 1 \\ \Leftrightarrow 2(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x - 2 &> 0 \\ \Leftrightarrow (2\log_2 x + 1)(\log_2 x - 2) &> 0 \\ \Leftrightarrow \log_2 x < -\frac{1}{2}, 2 < \log_2 x \\ \therefore 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}, 4 < x \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}, 4 < x$$

(2)

$y = -x^2$ を x で微分すると $y' = -2x$ であるため, 点 $P(p, -p^2)$ における接線の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= -2p(x - p) - p^2 \\ &= -2px + p^2 \end{aligned}$$

となる。これが点 $A(0, a)$ を通るとき,

$$a = -2p \cdot 0 + p^2 \Leftrightarrow a = p^2$$

が成り立つ。 p は実数であるため, $a \geq 0$ となる。このとき,

$$a = p^2 \Leftrightarrow p = \pm\sqrt{a}$$

となる。したがって, 点 A から引いた 2 本の接線の方程式は,

$$y = -2\sqrt{a}x + a, y = 2\sqrt{a}x + a$$

である。これらが直交するとき,

$$\begin{aligned} -2\sqrt{a} \cdot 2\sqrt{a} &= -1 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。これは $a \geq 0$ を満たす。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{1}{4}$$

(3)

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x^2 \sin 2x dx &= \left[-\frac{1}{2} x^2 \cos 2x \right]_0^\pi + \int_0^\pi x \cos 2x dx \\ &= -\frac{1}{2} \pi^2 + \left[\frac{1}{2} x \sin 2x \right]_0^\pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin 2x dx \\ &= -\frac{1}{2} \pi^2 - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^\pi \\ &= -\frac{1}{2} \pi^2 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \int_0^\pi x^2 \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \pi^2$$

Ⅱ

(1)

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{OC} \end{cases}$$

であるため、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{BQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OB} \\ &= -\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

となる。また、 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1$ であり、 $\triangle OAB$, $\triangle OBC$ は共に正三角形であるため、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

となる。さらに、四角形 ABCD は1辺の長さが1の正方形であるため、 $AC = \sqrt{2}$ が成り立つ。よって、 $\triangle OAC$ は $\angle AOC = \frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形であるため、

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BQ} &= \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \right) \cdot \left(-\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} \right) \\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2 + \frac{2}{3}t\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - t\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 1^2 + \frac{2}{3}t \cdot 0 - t \cdot \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}t + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BP}|^2 &= \left| \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \right|^2 \\ &= \frac{4}{9}|\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{4}{3}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= \frac{4}{9} \cdot 1^2 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \\ &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

となるため、 $|\overrightarrow{BP}| \geq 0$ より、 $|\overrightarrow{BP}| = \frac{\sqrt{7}}{3}$ である。さらに、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BQ}|^2 &= |-\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OB}|^2 - 2t\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + t^2|\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= 1^2 - 2t \cdot \frac{1}{2} + t^2 \cdot 1^2 \\ &= t^2 - t + 1 \end{aligned}$$

となるため、 $|\overrightarrow{BQ}| \geq 0$ より、 $|\overrightarrow{BQ}| = \sqrt{t^2 - t + 1}$ である。ここで、線分 BP と線分 BQ のなす角が

$\frac{\pi}{3}$ になるとき、 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BQ} = |\overrightarrow{BP}| |\overrightarrow{BQ}| \cos \frac{\pi}{3}$ が成り立つため、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BQ} &= |\overrightarrow{BP}| |\overrightarrow{BQ}| \cos \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2}t + \frac{2}{3} &= \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \sqrt{t^2 - t + 1} \cdot \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow -3t + 4 &= \sqrt{7} \sqrt{t^2 - t + 1} \end{aligned}$$

となる。 $0 < t < 1$ のとき両辺が共に正であるため、2乗しても同値性は失われない。よって、

$$\begin{aligned} 9t^2 - 24t + 16 &= 7(t^2 - t + 1) \\ \Leftrightarrow 2t^2 - 17t + 9 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{17 - \sqrt{217}}{4} \quad (\because 0 < t < 1) \end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad t = \frac{17 - \sqrt{217}}{4}$$

(2)

点 P(p , p^2) とおき、点 Q(X , Y) とおく。点 Q は線分 AP を 1:2 に内分する点であるため、

$$\begin{cases} X = \frac{2+p}{3} \\ Y = \frac{2a+p^2}{3} \end{cases}$$

と表せる。

$$X = \frac{2+p}{3} \Leftrightarrow p = 3X - 2$$

であるため、これを $Y = \frac{2a+p^2}{3}$ に代入すると、

$$\begin{aligned} Y &= \frac{2a + (3X - 2)^2}{3} \\ &= 3X^2 - 4X + \frac{2a+4}{3} \end{aligned}$$

となる。 p は実数全体を動き、また、 $X = \frac{2+p}{3}$ が成り立つため、 X は実数全体を動く。よっ

て、条件を満たす任意の点 Q は放物線 $y = 3x^2 - 4x + \frac{2a+4}{3}$ 上にある。逆に、放物線

$y = 3x^2 - 4x + \frac{2a+4}{3}$ 上の任意の点 Q は条件を満たす。したがって、点 Q の軌跡の方程式は、

$$y = 3x^2 - 4x + \frac{2a+4}{3}$$

である。

$$\text{(答)} \quad y = 3x^2 - 4x + \frac{2a+4}{3}$$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^{\sin 3x} e^{2t} dt &= e^{2\sin 3x} \cdot (\sin 3x)' \\ &= 3e^{2\sin 3x} \cos 3x \end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad \frac{d}{dx} \int_0^{\sin 3x} e^{2t} dt = 3e^{2\sin 3x} \cos 3x$$

(1)

はじめ A には $0(g)$, B には $s(g)$ の食塩が含まれている。1 回の操作により, A に含まれる食塩の $\frac{1}{3}$ が捨てられ, B から A に $\frac{1}{3}s(g)$ の食塩が加えられるため,

$$w_1 = \frac{1}{3}s$$

$$w_2 = \frac{2}{3}w_1 + \frac{1}{3}s = \frac{5}{9}s$$

$$w_3 = \frac{2}{3}w_2 + \frac{1}{3}s = \frac{19}{27}s$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad w_1 = \frac{1}{3}s, w_2 = \frac{5}{9}s, w_3 = \frac{19}{27}s$$

(2)

1 回の操作により, A に含まれる食塩の $\frac{1}{n}$ が捨てられ, B から A に $\frac{1}{n}s(g)$ の食塩が加えられる。 k 回の操作後に A に含まれる食塩の量は $a_k(g)$ であるため, $1 \leq k \leq n-1$ のとき

$$a_{k+1} = a_k \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}s$$

が成り立つ。これを变形すると,

$$a_{k+1} - s = \left(1 - \frac{1}{n}\right)(a_k - s)$$

となるため, 数列 $\{a_k - s\}$ は初項 $a_1 - s = -s\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, 公比 $1 - \frac{1}{n}$ の等比数列である。よって,

$$a_k - s = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} (a_1 - s)$$

$$\Leftrightarrow a_k = s \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \right\} \quad (1 \leq k \leq n)$$

が成り立つため, $k = n$ のとき,

$$a_n = s \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right\}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_{k+1} = a_k \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}s, a_n = s \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right\}$$