

I

(1)

$$3 < \sqrt{11} < 4$$

より,

$$\begin{cases} a=3 \\ b=\sqrt{11}-3 \end{cases}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} + \frac{a}{2} &= \frac{1}{\sqrt{11}-3} + \frac{3}{2} \\ &= \frac{\sqrt{11}+3}{(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)} + \frac{3}{2} \\ &= \frac{\sqrt{11}+3}{2} + \frac{3}{2} \\ &= \frac{\sqrt{11}+6}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\sqrt{11}+6}{2}$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{x^{10}-1}{x^5} &= x^5 - \frac{1}{x^5} \\ &= \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(x^4 + x^3 \cdot \frac{1}{x} + x^2 \cdot \frac{1}{x^2} + x \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) \\ &= \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(x^4 + x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

であり, また,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{2}{3+\sqrt{13}} \\ &= \frac{2(3-\sqrt{13})}{(3+\sqrt{13})(3-\sqrt{13})} \\ &= \frac{2(3-\sqrt{13})}{-4} \\ &= \frac{\sqrt{13}-3}{2} \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{x} &= 3 \\ x^2 + \frac{1}{x^2} &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \\ &= 3^2 + 2 \\ &= 11 \\ x^4 + \frac{1}{x^4} &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 \\ &= 11^2 - 2 \\ &= 119 \end{aligned}$$

であるから, ①より,

$$\begin{aligned} \frac{x^{10}-1}{x^5} &= 3(119+11+1) \\ &= 393 \end{aligned}$$

となる。

(答) 393

(3)

$$a_{n+1} + 3a_n = 4 \Leftrightarrow a_{n+1} - 1 = -3(a_n - 1)$$

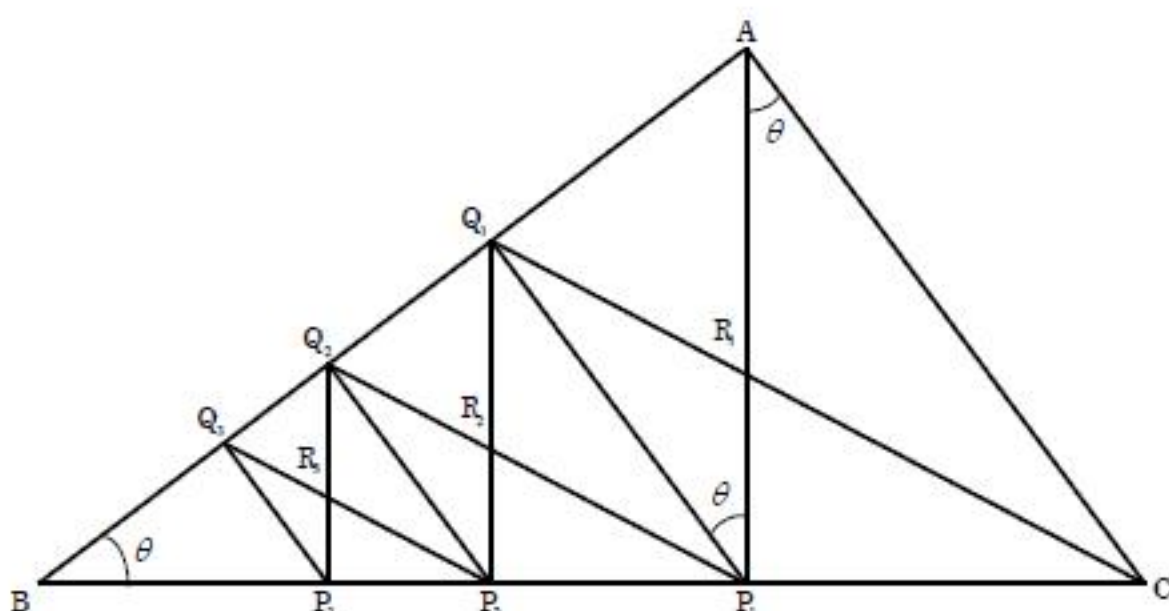
より, 数列 $\{a_n - 1\}$ は初項 $a_1 - 1 = 2 - 1 = 1$, 公比 -3 の等比数列であるから,

$$a_n - 1 = 1 \cdot (-3)^{n-1} \quad \therefore a_n = (-3)^{n-1} + 1$$

である。

(答) $(-3)^{n-1} + 1$

II



(1)

$$\begin{aligned} AB &= BC \cos \theta \\ &= a \cos \theta \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} AP_1 &= AB \sin \theta \\ &= a \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

であり, また,

$$\begin{aligned} \angle AP_1Q_1 &= \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \angle Q_1AP_1 \right) \\ &= \theta \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} P_1Q_1 &= AP_1 \cos \theta \\ &= a \cos^2 \theta \sin \theta \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad AP_1 = a \cos \theta \sin \theta$$

$$P_1Q_1 = a \cos^2 \theta \sin \theta$$

(2)

$$\angle BQ_1P_1 = \angle BAC$$

より,

$$Q_1P_1 \text{ と } AC \text{ は平行} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

であるから, (1)の結果より,

$$\begin{aligned} \overline{P_1Q_1} &= \frac{|\overline{P_1Q_1}|}{|\overline{CA}|} \overline{CA} \\ &= \frac{a \cos^2 \theta \sin \theta}{a \sin \theta} \overline{CA} \\ &= \cos^2 \theta \overline{CA} \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} \overline{CQ_1} &= \overline{CP_1} + \overline{P_1Q_1} \\ &= \overline{CP_1} + \cos^2 \theta \overline{CA} \end{aligned}$$

であり, R_1 は CQ_1 上の点であるから, ある実数 k を用いて,

$$\overline{CR_1} = k \overline{CP_1} + k \cos^2 \theta \overline{CA} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

と表せる。これが AP_1 上にある条件は,

$$\begin{aligned} k + k \cos^2 \theta &= 1 \\ \therefore k &= \frac{1}{1 + \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

であるから, ②より,

$$\overline{CR_1} = \frac{1}{1 + \cos^2 \theta} \overline{CP_1} + \frac{\cos^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} \overline{CA}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{1 + \cos^2 \theta} \overline{CP_1} + \frac{\cos^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} \overline{CA}$$

(3)

①より,

$$\begin{aligned} \angle CAP_1 &= \angle AP_1Q_1 \\ &= \theta \end{aligned}$$

であるから, $\triangle CAP_1$ の面積は, (1)の結果より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} AP_1 \cdot CP_1 &= \frac{1}{2} a \cos \theta \sin \theta \cdot a \sin^2 \theta \\ &= \frac{1}{2} a^2 \cos \theta \sin^3 \theta \end{aligned}$$

となる。ここで, (2)の結果より,

$$AR : R_1P = 1 : \cos^2 \theta$$

であるから,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} a^2 \cos \theta \sin^3 \theta \cdot \frac{\cos^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} \\ &= \frac{a^2 \cos^3 \theta \sin^3 \theta}{2(1 + \cos^2 \theta)} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{a^2 \cos^3 \theta \sin^3 \theta}{2(1 + \cos^2 \theta)}$$

(4)

$P_i, Q_i, R_i (i=1, 2, 3)$ の構成の仕方から, $\triangle R_1P_1C \sim \triangle R_3P_3P_2$ であり, その相似比は,

$BC : BP_2$ である。ここで,

$$\begin{aligned} BP_2 &= BQ_1 \cos \theta \\ &= BP_1 \cos^2 \theta \\ &= BA \cos^3 \theta \\ &= a \cos^4 \theta \end{aligned}$$

であり, 相似な三角形の面積比は, 相似比の 2 乗の比になることから,

$$\begin{aligned} S_3 &= S_1 \cdot \left(\frac{BP_2}{BC} \right)^2 \\ &= \frac{a^2 \cos^3 \theta \sin^3 \theta}{2(1 + \cos^2 \theta)} \cdot (\cos^4 \theta)^2 \\ &= \frac{a^2 \cos^{11} \theta \sin^3 \theta}{2(1 + \cos^2 \theta)} \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \frac{a^2 \cos^{11} \theta \sin^3 \theta}{2(1 + \cos^2 \theta)}$$

III

(1)

4 枚の硬貨を同時に投げて n 枚表が出る確率は、

$$\frac{{}_4C_n}{2^4}$$

であり、これを計算すると次表のようになる。

表の枚数	0	1	2	3	4
確率	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

よって表の出る枚数の期待値は、

$$0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = 2$$

である。

(答) 2

(2)

(1)の確率分布表より、得点の期待値は、

$$100 \cdot \frac{6}{16} + 50 \cdot \frac{1}{16} + 30 \cdot \frac{1}{16} + 0 \cdot \left(\frac{4}{16} + \frac{4}{16} \right) = \frac{85}{2}$$

となる。

(答) $\frac{85}{2}$

IV

(1)

部分積分を用いて、

$$\begin{aligned} a_n &= -\left[(e^x - e^{-x}) \sin 2nx \right]_0^\pi + \int_0^\pi (e^x - e^{-x}) 2n \cos 2nx dx \\ &= 2n \int_0^\pi (e^x - e^{-x}) \cos 2nx dx \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \textcircled{1} \\ &= 2n \left[(e^x + e^{-x}) \cos 2nx \right]_0^\pi - 2n \int_0^\pi (e^x + e^{-x}) 2n (-\sin 2nx) dx \\ &= 2n \left\{ (e^\pi + e^{-\pi}) - (e^0 + e^{-0}) \right\} - 4n^2 a_n \\ &= 2n (e^\pi + e^{-\pi} - 2) - 4n^2 a_n \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} (4n^2 + 1) a_n &= 2n (e^\pi + e^{-\pi} - 2) \\ \therefore a_n &= \frac{2n (e^\pi + e^{-\pi} - 2)}{4n^2 + 1} \end{aligned}$$

を得る。また、①より、

$$a_n = 2n b_n$$

であるから、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2n} a_n \\ &= \frac{e^\pi + e^{-\pi} - 2}{4n^2 + 1} \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} (\text{答}) a_n &= \frac{2n (e^\pi + e^{-\pi} - 2)}{4n^2 + 1} \\ b_n &= \frac{e^\pi + e^{-\pi} - 2}{4n^2 + 1} \end{aligned}$$

(2)

部分分数分解を用いて、

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} \frac{1}{4x^2 - 1} dx &= \int_n^{n+1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \log |2x-1| - \frac{1}{2} \log |2x+1| \right]_n^{n+1} \\ &= \frac{1}{4} \log \frac{(2n+1)^2}{(2n-1)(2n+3)} \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \frac{1}{4} \log \frac{(2n+1)^2}{(2n-1)(2n+3)}$$

(3)

(1)の結果より、

$$\frac{(4n^2 + 1) b_n}{4n^2 - 1} = \frac{e^\pi + e^{-\pi} - 2}{4n^2 - 1} \quad \cdots \textcircled{2}$$

であり、ここで、

$$f(x) = \frac{1}{4x^2 - 1}$$

は $x \geq 1$ において単調減少関数だから、任意の自然数 n に対して、

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{4x^2 - 1} dx < \int_n^{n+1} \frac{1}{4n^2 - 1} dx = \frac{1}{4n^2 - 1} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \textcircled{3}$$

となる。よって(2)の結果と②、③より、

$$\begin{aligned} \frac{(4n^2 + 1) b_n}{4n^2 - 1} &> (e^\pi + e^{-\pi} - 2) \int_n^{n+1} \frac{1}{4x^2 - 1} dx \\ &= \frac{e^\pi + e^{-\pi} - 2}{4} \log \frac{(2n+1)^2}{(2n-1)(2n+3)} \\ &> \frac{e^\pi - e^{-\pi} - 2}{4} \log \frac{(2n+1)^2}{(2n-1)(2n+3)} \end{aligned}$$

となる。

(証明終)