

## I

(1)

 $a, b > 0$  より  $a + b > 0$  であるから,

$$\begin{aligned}
 a^3 + b^3 - (a^2b + ab^2) &= a^2(a - b) + b^2(b - a) \\
 &= (a - b)(a^2 - b^2) \\
 &= (a - b)^2(a + b) \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$$

である。

(証明終)

(2)

$f(x) = 2x^2 - kx + 1$  とおく。  $0 < x < 1$  と  $1 < x < 2$  の範囲に解を一つずつもつための条件は、  
 $f(x)$  の  $x^2$  の係数が正であることから、

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(1) < 0 \\ f(2) > 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ 3 - k < 0 \\ 9 - 2k > 0 \end{cases} \\
 &\therefore 3 < k < \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

である。

(答)  $3 < k < \frac{9}{2}$ 

(3)

 $x, y, z > 0$  より

$$\begin{aligned}
 \frac{yz}{x} &= \frac{zx}{4y} = \frac{xy}{9z} \\
 \Leftrightarrow \frac{xyz}{x^2} &= \frac{xyz}{4y^2} = \frac{xyz}{9z^2} \\
 \Leftrightarrow x^2 &= (2y)^2 = (3z)^2 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \\ \frac{z}{x} = \frac{1}{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

である。 よって

$$\begin{aligned}
 \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= \frac{1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{z}{x}\right)^2}} \\
 &= \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}} \\
 &= \frac{\frac{11}{6}}{\frac{6}{7}} \\
 &= \frac{11}{7}
 \end{aligned}$$

である。

(答)  $\frac{11}{7}$

## II

$X = \log_{10} x$ ,  $Y = \log_{10} y$  とおくと,

$$\begin{cases} 4(\log_{10} x)^2 + 2\log_{10} y = 1 \\ x^2 y = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4X^2 + 2Y = 1 \\ 2X + Y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4X^2 + 2 - 4X - 1 = 0 \\ Y = 1 - 2X \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4X^2 - 4X + 1 = 0 \\ Y = 1 - 2X \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2X - 1)^2 = 0 \\ Y = 1 - 2X \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{2} \\ Y = 0 \end{cases}$$

である。よって

$$x = \sqrt{10}, y = 1$$

である。

(答)  $x = \sqrt{10}$ ,  $y = 1$

### III

(1)

直線  $x+y=k$  と原点の距離が  $\sqrt{2}$  未満となればよいから、

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+1^2}} < \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow -2 < k < 2$$

である。

(答)  $-2 < k < 2$

(2)

$x^2+y^2=2$  と  $y=-x+k$  の交点の  $x$  座標は、

$$x^2+(-x+k)^2=2 \Leftrightarrow 2x^2-2kx+k^2-2=0$$

の解である。よって解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=k, \alpha\beta=\frac{k^2-2}{2}$$

である。

(答)  $\alpha+\beta=k, \alpha\beta=\frac{k^2-2}{2}$

(3)

直線  $\ell$  の傾きが  $-1$  であることに注意すると、線分  $PQ$  の長さは

$$\begin{aligned}\sqrt{2}|\beta-\alpha| &= \sqrt{2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{2}\sqrt{k^2-2(k^2-2)} \\ &= \sqrt{8-2k^2}\end{aligned}$$

である。

(答)  $\sqrt{8-2k^2}$

(4)

$\alpha+\beta=k$  より  $P(\alpha, \beta)$  であるから、

$$\begin{aligned}AP &= \sqrt{(-1-\alpha)^2+(-1-\beta)^2} \\ &= \sqrt{(\alpha^2+2\alpha+1)+(\beta^2+2\beta+1)} \\ &= \sqrt{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+2} \\ &= \sqrt{k^2-(k^2-2)+2k+2} \\ &= \sqrt{2k+4}\end{aligned}$$

である。よって

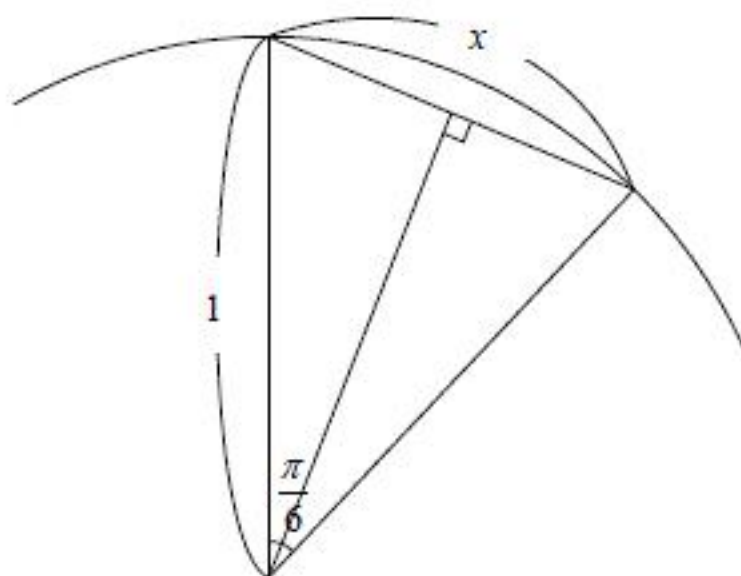
$$\begin{aligned}2PQ &= AP \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{8-2k^2} &= \sqrt{2k+4} \\ \Leftrightarrow 32-8k^2 &= 2k+4 \\ \Leftrightarrow 4k^2+k-14 &= 0 \\ \Leftrightarrow (k+2)(4k-7) &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{7}{4} \quad (\because -2 < k < 2)\end{aligned}$$

である。

(答)  $\frac{7}{4}$

# IV

(1)



上図より正 12 角形の一辺の長さ  $x$  は余弦定理より

$$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore x = \sqrt{2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

である。よって正 12 角形の面積は,

$$12 \cdot \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = 12 \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{1 - \frac{4 - 2\sqrt{3}}{8}}$$

$$= 12 \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{8}}$$

$$= 12 \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

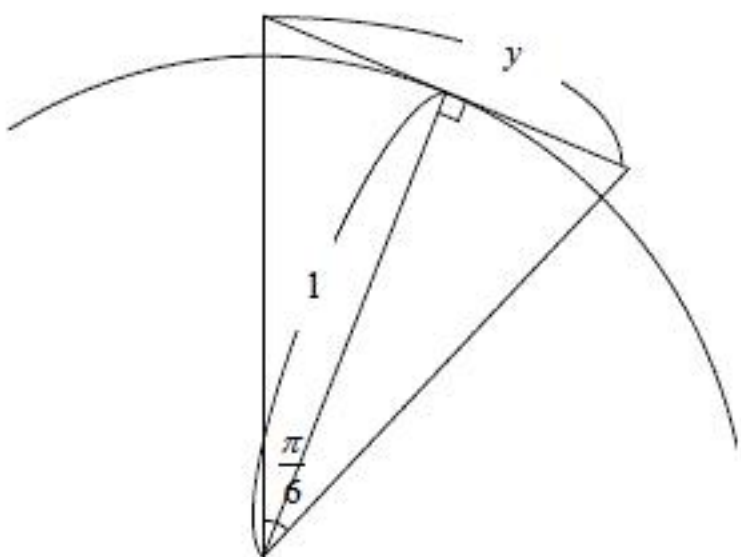
$$= 12 \cdot \frac{4}{16}$$

$$= 3$$

である。

(答) 一辺の長さ  $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$   
面積 3

(2)



上図の三角形は(1)の三角形と相似であるから、正 12 角形の一辺の長さを  $y$  とすると

$$y = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 4 - 2\sqrt{3}$$

である。よって正 12 角形の面積は,

$$12 \cdot \frac{1}{2} \cdot y \cdot 1 = 24 - 12\sqrt{3}$$

である。

(答) 一辺の長さ  $4 - 2\sqrt{3}$   
面積  $24 - 12\sqrt{3}$

(1)

$$\begin{aligned} 4 &= 1+1+1+1 \\ &= 2+1+1 \\ &= 2+2 \\ &= 3+1 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 &= 1 \\ 2 \cdot 1 \cdot 1 &= 2 \\ 2 \cdot 2 &= 4 \\ 3 \cdot 1 &= 3 \end{aligned}$$

より

$$P(4) = 4$$

である。

(答) 4

(2)

$$n = 1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k$$

のとき,

$$n = (1 + a_2) + a_3 + \cdots + a_k$$

である。

$$1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_k < (1 + a_2) \cdot a_3 \cdots a_k \quad (\because a_2 < 1 + a_2)$$

であるから,  $n > 1$  のとき  $a_1 = 1$  であるような  $n$  の分割から, その分割の積の値よりも大きな積の分割を必ず作り出すことができる。よって題意は示された。

(証明終)

(3)

$$n = 2 + 2 + 2 + a_4 + \cdots + a_k$$

のとき,

$$n = 3 + 3 + a_4 + \cdots + a_k$$

である。

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a_4 \cdots a_k < 3 \cdot 3 \cdot a_4 \cdots a_k \quad (\because 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 < 9 = 3 \cdot 3)$$

であるから, 要素に 2 を 3 個以上含むような  $n$  の分割から, その分割の積の値よりも大きな積の分割を必ず作り出すことができる。よって題意は示された。

(証明終)

(4)

$$n = (5 + m) + a_2 + a_3 + \cdots + a_k \quad (m \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

のとき,

$$n = 2 + (3 + m) + a_2 + a_3 + \cdots + a_k$$

である。

$$(5 + m) \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_k < 2 \cdot (3 + m) \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_k \quad (\because 5 + m < 6 + 2m)$$

であるから, 要素に 5 以上の整数を含むような  $n$  の分割から, その分割の積の値よりも大きな積の分割を必ず作り出すことができる。よって題意は示された。

(証明終)

(5)

(2), (3), (4)より最大分割を作るための必要条件は

- ・要素を構成するのは 2 以上 4 以下の整数
- ・要素に 2 が 3 回以上現れないこと

である。これに従い候補を書きだすと次のようになる。

$$\begin{aligned} 20 &= 2+2+3+3+3+3+4 \\ &= 2+2+4+4+4+4 \\ &= 2+3+3+4+4+4 \\ &= 2+3+3+3+3+3+3 \\ &= 3+3+3+3+4+4 \\ &= 4+4+4+4+4 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 &= 1296 \\ 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 &= 1024 \\ 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 &= 1152 \\ 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 &= 1458 \\ 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 &= 1296 \\ 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 &= 1024 \end{aligned}$$

であるから,

$$P(20) = 1458$$

である。

(答) 1458

## I

(1)

$$\begin{aligned}\sin\frac{7x}{3}\cos\frac{2x}{3} &= \frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{7x}{3}+\frac{2x}{3}\right)+\sin\left(\frac{7x}{3}-\frac{2x}{3}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin 3x+\sin\frac{5x}{3}\right)\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\sin\frac{7x}{3}\cos\frac{2x}{3}dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\sin 3x+\sin\frac{5x}{3}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\cos 3x-\frac{3}{5}\cos\frac{5x}{3}\right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\right)\right\} \\ &= \frac{9}{20}\end{aligned}$$

である。

(答)  $\frac{9}{20}$ 

(2)

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2k)^2-1} &= \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right\}\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{(2k)^2-1} &= \lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right) \\ &= \lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

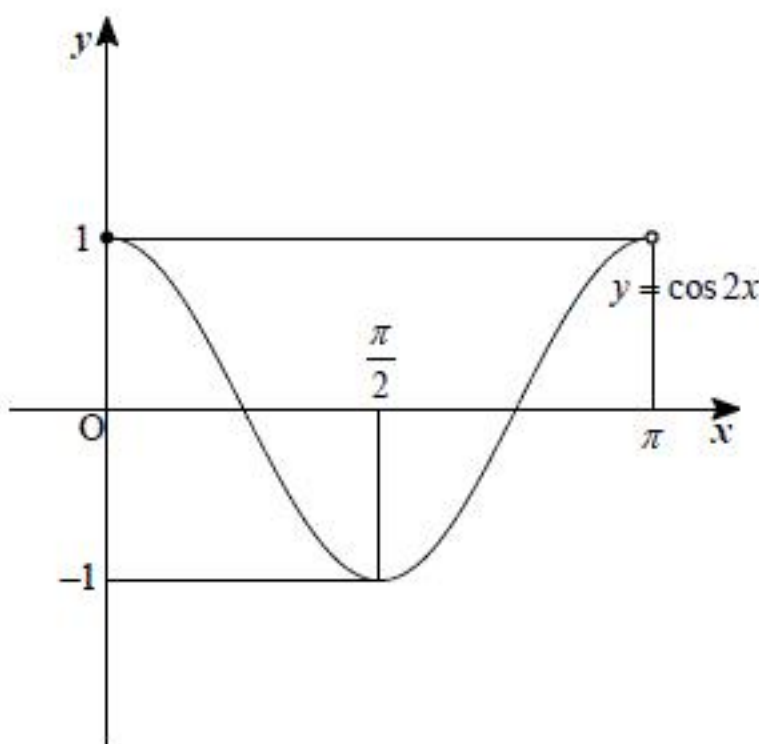
である。

(答)  $\frac{1}{2}$ 

(3)

$$\begin{aligned}1-4\cos^2 x &= a \\ \Leftrightarrow 1-(2+2\cos 2x) &= a \\ \Leftrightarrow \cos 2x &= -\frac{a+1}{2}\end{aligned}$$

である。よって  $y=\cos 2x$  ( $0\leq x<\pi$ ) と  $y=-\frac{a+1}{2}$  の交点の個数を考えればよい。



よって上図より交点の個数は,

$$-\frac{a+1}{2} < -1 \text{ のときすなわち } a > 1 \text{ のとき } 0 \text{ 個}$$

$$-\frac{a+1}{2} = -1 \text{ のときすなわち } a = 1 \text{ のとき } 1 \text{ 個}$$

$$-1 < -\frac{a+1}{2} < 1 \text{ のときすなわち } -3 < a < 1 \text{ のとき } 2 \text{ 個}$$

$$1 = -\frac{a+1}{2} \text{ のときすなわち } a = -3 \text{ のとき } 1 \text{ 個}$$

$$1 < -\frac{a+1}{2} \text{ のときすなわち } a < -3 \text{ のとき } 0 \text{ 個}$$

である。

(答)  $a < -3$  のとき 0 個 $a = -3$  のとき 1 個 $-3 < a < 1$  のとき 2 個 $a = 1$  のとき 1 個 $a > 1$  のとき 0 個

## II

$X = \log_{10} x$ ,  $Y = \log_{10} y$  とおくと,

$$\begin{cases} 4(\log_{10} x)^2 + 2\log_{10} y = 1 \\ x^2 y = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4X^2 + 2Y = 1 \\ 2X + Y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4X^2 + 2 - 4X - 1 = 0 \\ Y = 1 - 2X \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4X^2 - 4X + 1 = 0 \\ Y = 1 - 2X \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2X - 1)^2 = 0 \\ Y = 1 - 2X \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{2} \\ Y = 0 \end{cases}$$

である。よって

$$x = \sqrt{10}, y = 1$$

である。

(答)  $x = \sqrt{10}$ ,  $y = 1$

### III

(1)

直線  $x+y=k$  と原点の距離が  $\sqrt{2}$  未満となればよいから、

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+1^2}} < \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow -2 < k < 2$$

である。

(答)  $-2 < k < 2$

(2)

$x^2+y^2=2$  と  $y=-x+k$  の交点の  $x$  座標は、

$$x^2+(-x+k)^2=2 \Leftrightarrow 2x^2-2kx+k^2-2=0$$

の解である。よって解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=k, \alpha\beta=\frac{k^2-2}{2}$$

である。

(答)  $\alpha+\beta=k, \alpha\beta=\frac{k^2-2}{2}$

(3)

直線  $\ell$  の傾きが  $-1$  であることに注意すると、線分  $PQ$  の長さは

$$\begin{aligned}\sqrt{2}|\beta-\alpha| &= \sqrt{2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{2}\sqrt{k^2-2(k^2-2)} \\ &= \sqrt{8-2k^2}\end{aligned}$$

である。

(答)  $\sqrt{8-2k^2}$

(4)

$\alpha+\beta=k$  より  $P(\alpha, \beta)$  であるから、

$$\begin{aligned}AP &= \sqrt{(-1-\alpha)^2+(-1-\beta)^2} \\ &= \sqrt{(\alpha^2+2\alpha+1)+(\beta^2+2\beta+1)} \\ &= \sqrt{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+2} \\ &= \sqrt{k^2-(k^2-2)+2k+2} \\ &= \sqrt{2k+4}\end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned}2PQ &= AP \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{8-2k^2} &= \sqrt{2k+4} \\ \Leftrightarrow 32-8k^2 &= 2k+4 \\ \Leftrightarrow 4k^2+k-14 &= 0 \\ \Leftrightarrow (k+2)(4k-7) &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{7}{4} \quad (\because -2 < k < 2)\end{aligned}$$

である。

(答)  $\frac{7}{4}$

# IV

(1)

$$a_2 = \frac{2 \cdot 2^3 + 1}{3 \cdot 2^2} = \frac{17}{12}$$

である。

(答)  $\frac{17}{12}$

(2)

$$a_n > 1 \cdots \textcircled{1}$$

を帰納法により示す。

[1]  $n=1$  のとき

$a_1 = 2 > 1$  であるから  $\textcircled{1}$  は成り立つ。

[2]  $n=k$  で  $\textcircled{1}$  が成り立つとき

このとき、仮定より  $a_k > 1$  であるから、

$$a_{k+1} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a_k^3 + 1}{3a_k^2} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2a_k^3 - 3a_k^2 + 1 > 0 \quad (\because a_k > 0)$$

$$\Leftrightarrow (a_k - 1)^2 (2a_k + 1) > 0$$

は常に成り立つ。よって  $n=k+1$  のときも  $\textcircled{1}$  は成り立つ。

以上[1], [2]より,  $\textcircled{1}$  は示された。

(証明終)

(3)

(2)の結果より, 任意の自然数  $n$  について  $a_n > 1$  が成り立つから,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2a_n^3 + 1}{3a_n^2} - a_n \\ &= \frac{2a_n^3 + 1 - 3a_n^3}{3a_n^2} \\ &= \frac{1 - a_n^3}{3a_n^2} \\ &< 0 \quad (\because a_n > 1 \Leftrightarrow a_n^3 > 1) \end{aligned}$$

となる。よって任意の自然数  $n$  について

$$a_n > a_{n+1}$$

となることが示された。

(証明終)

V

(1)

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-a}}$$

である。

(答)  $\frac{1}{\sqrt{x-a}}$

(2)

$$g'(x) = \frac{x}{2} \text{ であるから,}$$

$$\begin{cases} \frac{t}{2} = \frac{1}{\sqrt{t-a}} \\ \frac{t^2}{4} + b = 2\sqrt{t-a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = t - \frac{4}{t^2} \\ b = \frac{4}{t} - \frac{t^2}{4} \end{cases}$$

である。

(答)  $\begin{cases} a = t - \frac{4}{t^2} \\ b = \frac{4}{t} - \frac{t^2}{4} \end{cases}$

(3)

$$g(t) = t - \frac{4}{t^2}, h(t) = \frac{4}{t} - \frac{t^2}{4} \text{ とする。}$$

$$g'(t) = 1 + \frac{8}{t^3}, h'(t) = -\frac{8+t^3}{2t^2}$$

より次の表を得る。

|         |     |    |     |     |     |                   |     |                   |     |
|---------|-----|----|-----|-----|-----|-------------------|-----|-------------------|-----|
| $t$     | ... | -2 | ... | (0) | ... | $2^{\frac{2}{3}}$ | ... | $2^{\frac{4}{3}}$ | ... |
| $g'(t)$ | +   | 0  | -   |     | +   | +                 | +   | +                 | +   |
| $g(t)$  | ↗   | -3 | ↘   |     | ↗   | 0                 | ↗   | ↗                 | ↗   |
| $h'(t)$ | +   | 0  | -   |     | -   | -                 | -   | -                 | -   |
| $h(t)$  | ↗   | -3 | ↘   |     | ↘   | ↘                 | ↘   | 0                 | ↘   |

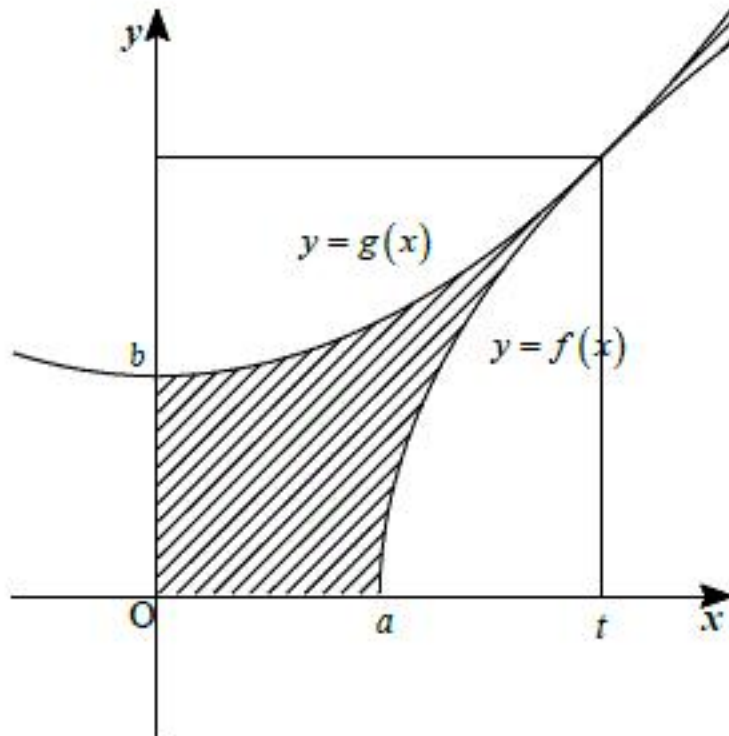
いま  $a, b$  はともに正であるから, 求める  $t$  の範囲は  $g(t) > 0$  かつ  $h(t) > 0$  となる範囲であり, これは増減表より

$$2^{\frac{2}{3}} < t < 2^{\frac{4}{3}}$$

である。

(答)  $2^{\frac{2}{3}} < t < 2^{\frac{4}{3}}$

(4)



上図斜線部の面積を求めればよい。よって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^t g(x) dx - \int_a^t f(x) dx \\ &= \left[ \frac{x^3}{12} + bx \right]_0^t - \left[ \frac{4}{3}(x-a)^{\frac{3}{2}} \right]_a^t \\ &= \frac{t^3}{12} + 4 - \frac{t^3}{4} - \frac{4}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{t^3}{12} + 4 - \frac{t^3}{4} - \frac{4}{3} \left( \frac{4}{t^2} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{t^3}{12} + 4 - \frac{t^3}{4} - \frac{4}{3} \left( \frac{2}{t} \right)^3 \\ &= -\frac{t^3}{6} - \frac{32}{3t^3} + 4 \end{aligned}$$

である。

(答)  $-\frac{t^3}{6} - \frac{32}{3t^3} + 4$

(5)

$t > 0$  であることに注意すれば, 相加相乗平均の不等式より,

$$\frac{t^3}{6} + \frac{32}{3t^3} \geq 2\sqrt{\frac{t^3}{6} \cdot \frac{32}{3t^3}} = \frac{8}{3} \quad (\text{等号成立は } \frac{t^3}{6} = \frac{32}{3t^3} \Leftrightarrow t^6 = 64 \Leftrightarrow t = 2 \text{ のとき})$$

である。したがって  $-\frac{t^3}{6} - \frac{32}{3t^3} + 4$  の最大値は

$$4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \quad (t=2)$$

である。

(答)  $\frac{4}{3} \quad (t=2)$