

I

(1)

与式より $0 \leq a \leq 2$ を満たす実数 a について

$$\begin{aligned} f(1+a) &= |1+a| + |a| + |-1+a| \\ &= |a+1| + |a| + |a-1| \\ f(1-a) &= |1-a| + |-a| + |-1-a| \\ &= |a+1| + |a| + |a-1| \\ \therefore f(1+a) &= f(1-a) \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、 $f(x)$ は $x=1$ に関して対称である。よって $1 \leq x \leq 3$ について考えれば十分である。 $f(x)$ の絶対値を外すと

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (1 \leq x < 2) \\ 3x-3 & (2 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

となるから、 $f(x)$ は $x=-1, 3$ で最大値 6 をとり、 $x=1$ で最小値 2 をとる。

(答) 最大値 6 ($x=-1, 3$), 最小値 2 ($x=1$)

(2)

真数条件より $x \geq 0$, $y \geq 0$ であるので、 $\sqrt{x} \geq 0$, $\sqrt{y} \geq 0$ であるから相加相乗平均の関係式より

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{\sqrt{xy}}$$

$$\Leftrightarrow 5 \geq (xy)^{\frac{1}{4}}$$

となる。等号は $\sqrt{x} = \sqrt{y} = 5$, つまり $x = y = 25$ のときなりたつ。両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 5 \geq \frac{1}{4}(\log_{10} x + \log_{10} y)$$

$$\Leftrightarrow 4\log_{10} \frac{10}{2} \geq \log_{10} x + \log_{10} y$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4\log_{10} 2 \geq \log_{10} x + \log_{10} y$$

となるから、 $\log_{10} x + \log_{10} y$ は $x = y = 25$ のとき最大値 $4 - 4\log_{10} 2$ をとることがわかる。

(答) $4 - 4\log_{10} 2$

(3)

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 5\sin\theta - 12\cos\theta \\ &= 13\sin(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

と変形できる。ただし $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ である。 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ より $\alpha \leq \theta + \alpha \leq 2\pi + \alpha$ で

あるから、 $f(\theta)$ の最大値は 13, 最小値は -13 となる。

(答) 最大値: 13, 最小値: -13

II

(1)

加法定理を繰り返し用いることにより

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos \theta \cos 2\theta - \sin \theta \sin 2\theta \\ &= \cos \theta (2\cos^2 \theta - 1) - \sin \theta (2\sin \theta \cos \theta) \\ &= 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta)\cos \theta \\ &= 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta\end{aligned}$$

と変形できるから、題意は示された。

(証明終)

(2)

$\theta = 54^\circ$ とすると、 $5\theta = 270^\circ$ より

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos(5\theta - 2\theta) \\ &= \cos(270^\circ - 2\theta) \\ &= -\sin 2\theta\end{aligned}$$

が成り立つ。(1)の結果を用いて、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ に注意してこの式を変形していくと

$$\begin{aligned}4\cos^3 \theta - 3\cos \theta &= -2\sin \theta \cos \theta \\ \Leftrightarrow 4\cos^2 \theta - 3 &= -2\sin \theta \quad (\because \cos \theta \neq 0) \\ \Leftrightarrow 4\sin^2 \theta - 2\sin \theta - 1 &= 0 \\ \therefore \sin \theta &= \frac{1+\sqrt{5}}{4} \quad (\because 0 < \sin \theta < 1)\end{aligned}$$

を得る。 $\cos \theta > 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{16 - (1 + \sqrt{5})^2} \\ &= \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

(3)

題意の正五角形は頂角が 72° 、底角が 54° で等辺の長さが r の二等辺三角形5つに分割できる。二等辺三角形の底辺の長さは $2r \cos 54^\circ$ であるから、二等辺三角形の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}r \cdot 2r \cos 54^\circ \cdot \sin 54^\circ &= r^2 \cdot \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{r^2}{16} \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})(1 + \sqrt{5})^2} \\ &= \frac{r^2}{16} \sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)^2} \\ &= \frac{r^2}{8} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\end{aligned}$$

となる。よって正五角形の面積は $\frac{5r^2}{8} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5r^2}{8} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

IV

$f(x) = -2x^3 + 3$, $g(x) = -2x^3 - 1$ とすると

$$f'(x) = g'(x) = -6x^2$$

である。 $y = f(x)$ 上の点 $(\alpha, f(\alpha))$ における接線と $y = g(x)$ 上の点 $(\beta, f(\beta))$ における接線の

方程式は

$$\begin{cases} y = -6\alpha^2(x - \alpha) - 2\alpha^3 + 3 \\ y = -6\beta^2(x - \beta) - 2\beta^3 - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -6\alpha^2x + 4\alpha^3 + 3 \\ y = -6\beta^2x + 4\beta^3 - 1 \end{cases}$$

となる。これらが一致するとき

$$\begin{cases} -6\alpha^2 = -6\beta^2 \\ 4\alpha^3 + 3 = 4\beta^3 - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\beta \\ \alpha^3 = \beta^3 - 1 \end{cases}$$

となる。二式が同時に満たされるためには $\alpha = \beta$ は不適であるので $\alpha = -\beta$ となり

$$\alpha^3 = -\alpha^3 - 1$$

$$\therefore \alpha = -2^{\frac{1}{3}}$$

を得る。よって求める直線の方程式は

$$y = -6 \cdot 2^{\frac{2}{3}}x + 1$$

$$= -3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}x + 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = -3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}x + 1$$

V

(1)

仮定より

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \langle 1.7 \rangle \\ &= 1.7 - 1 \\ &= 0.7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle 2x \rangle &= \langle 3.4 \rangle \\ &= 3.4 - 3 \\ &= 0.4\end{aligned}$$

となる。

(答) $\langle x \rangle = 0.7, \langle 2x \rangle = 0.4$

(2)

仮定より

$$\begin{aligned}\langle \alpha + n \rangle &= \alpha + n - [\alpha + n] \\ &= \alpha + n - ([\alpha] + n) \\ &= \alpha - [\alpha] \\ &= \langle \alpha \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle 2(\alpha + n) \rangle &= 2(\alpha + n) - [2(\alpha + n)] \\ &= 2\alpha + 2n - [2\alpha] - 2n \\ &= 2\alpha - [2\alpha] \\ &= \langle 2\alpha \rangle\end{aligned}$$

となることから、 $x = \alpha$ が与式の解のとき

$$\begin{aligned}4\langle \alpha + n \rangle^2 - \langle 2(\alpha + n) \rangle - a &= 4\langle \alpha \rangle^2 - \langle 2\alpha \rangle - a \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。よって $x = \alpha + n$ も与式の解となることが示された。

(証明終)

(3)

$f(x) = 4\langle x \rangle^2 - \langle 2x \rangle$ とおく。(2)より任意の整数 n について

$$f(x) = f(x + n)$$

が成り立つことから、 $f(x)$ は周期1の関数であることがわかる。よって $0 \leq x < 1$ の範囲で考えれば十分であり、このとき

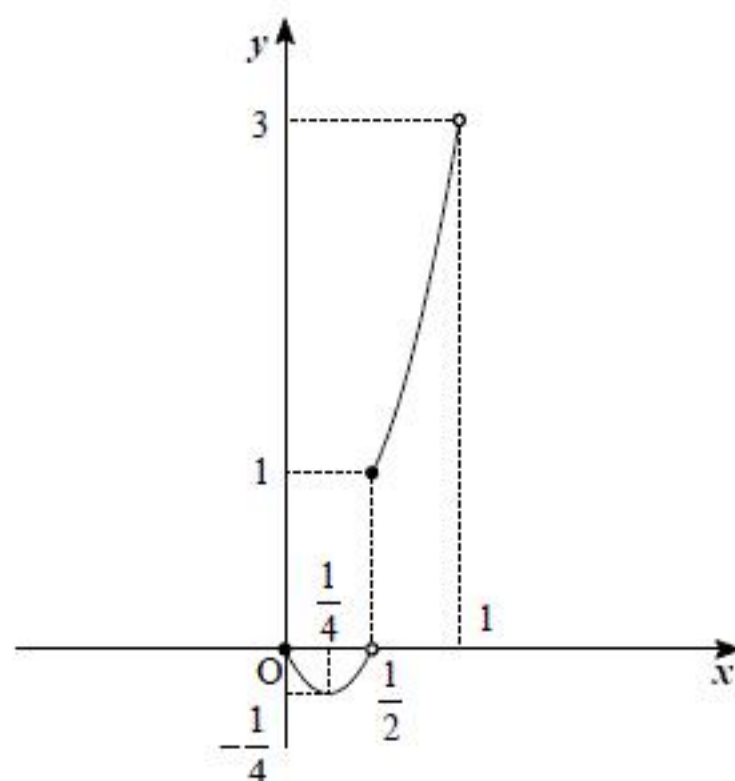
$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= x - [x] \\ &= x\end{aligned}$$

$$\langle 2x \rangle = \begin{cases} 2x & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ 2x - 1 & (\frac{1}{2} \leq x < 1) \end{cases}$$

となる。よって $0 \leq x < 1$ で与式は

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 2x & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ 4x^2 - 2x + 1 & (\frac{1}{2} \leq x < 1) \end{cases}$$

となるから、グラフは下図のようになる。



与式が解をもつとき、 $y = f(x)$ と $y = a$ がもつから、求める条件は

$$-\frac{1}{4} \leq a \leq 0, 1 \leq a < 3$$

となる。

(答) $-\frac{1}{4} \leq a \leq 0, 1 \leq a < 3$