

I

(1)

与式より $0 \leq a \leq 2$ を満たす実数 a について

$$\begin{aligned} f(1+a) &= |1+a| + |a| + |-1+a| \\ &= |a+1| + |a| + |a-1| \\ f(1-a) &= |1-a| + |-a| + |-1-a| \\ &= |a+1| + |a| + |a-1| \\ \therefore f(1+a) &= f(1-a) \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、 $f(x)$ は $x=1$ に関して対称である。よって $1 \leq x \leq 3$ について考えれば十分である。 $f(x)$ の絶対値を外すと

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (1 \leq x < 2) \\ 3x-3 & (2 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

となるから、 $f(x)$ は $x=-1, 3$ で最大値 6 をとり、 $x=1$ で最小値 2 をとる。

(答) 最大値 6 ($x=-1, 3$), 最小値 2 ($x=1$)

(2)

真数条件より $x \geq 0$, $y \geq 0$ であるので、 $\sqrt{x} \geq 0$, $\sqrt{y} \geq 0$ であるから相加相乗平均の関係式より

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{\sqrt{xy}}$$

$$\Leftrightarrow 5 \geq (xy)^{\frac{1}{4}}$$

となる。等号は $\sqrt{x} = \sqrt{y} = 5$, つまり $x = y = 25$ のときなりたつ。両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 5 \geq \frac{1}{4}(\log_{10} x + \log_{10} y)$$

$$\Leftrightarrow 4\log_{10} \frac{10}{2} \geq \log_{10} x + \log_{10} y$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4\log_{10} 2 \geq \log_{10} x + \log_{10} y$$

となるから、 $\log_{10} x + \log_{10} y$ は $x = y = 25$ のとき最大値 $4 - 4\log_{10} 2$ をとることがわかる。

(答) $4 - 4\log_{10} 2$

(3)

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 5\sin\theta - 12\cos\theta \\ &= 13\sin(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

と変形できる。ただし $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ である。 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ より $\alpha \leq \theta + \alpha \leq 2\pi + \alpha$ で

あるから、 $f(\theta)$ の最大値は 13, 最小値は -13 となる。

(答) 最大値: 13, 最小値: -13

II

(1)

加法定理を繰り返し用いることにより

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos \theta \cos 2\theta - \sin \theta \sin 2\theta \\ &= \cos \theta (2\cos^2 \theta - 1) - \sin \theta (2\sin \theta \cos \theta) \\ &= 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta)\cos \theta \\ &= 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta\end{aligned}$$

と変形できるから、題意は示された。

(証明終)

(2)

$\theta = 54^\circ$ とすると、 $5\theta = 270^\circ$ より

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos(5\theta - 2\theta) \\ &= \cos(270^\circ - 2\theta) \\ &= -\sin 2\theta\end{aligned}$$

が成り立つ。(1)の結果を用いて、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ に注意してこの式を変形していくと

$$\begin{aligned}4\cos^3 \theta - 3\cos \theta &= -2\sin \theta \cos \theta \\ \Leftrightarrow 4\cos^2 \theta - 3 &= -2\sin \theta \quad (\because \cos \theta \neq 0) \\ \Leftrightarrow 4\sin^2 \theta - 2\sin \theta - 1 &= 0 \\ \therefore \sin \theta &= \frac{1+\sqrt{5}}{4} \quad (\because 0 < \sin \theta < 1)\end{aligned}$$

を得る。 $\cos \theta > 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{16 - (1 + \sqrt{5})^2} \\ &= \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

(3)

題意の正五角形は頂角が 72° 、底角が 54° で等辺の長さが r の二等辺三角形5つに分割できる。二等辺三角形の底辺の長さは $2r \cos 54^\circ$ であるから、二等辺三角形の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}r \cdot 2r \cos 54^\circ \cdot \sin 54^\circ &= r^2 \cdot \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{r^2}{16} \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})(1 + \sqrt{5})^2} \\ &= \frac{r^2}{16} \sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)^2} \\ &= \frac{r^2}{8} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\end{aligned}$$

となる。よって正五角形の面積は $\frac{5r^2}{8} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5r^2}{8} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

III

(1)

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} S_n &= 2S_n - S_n \\ &= 2\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{k}{2^k}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^k} + \frac{n}{2^n}\right) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{2^k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^k} - \frac{n}{2^n} \\ &= 1 - \frac{n}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \\ &= 1 - \frac{n}{2^n} + \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 - \frac{n+2}{2^n} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 2x - 3} &= \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x-3)} \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\log \left| \frac{x-3}{x+1} \right| \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{4} \log 3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{1}{4} \log 3$$

(3)

$1 \leq x \leq 2$ のとき $0 \leq y \leq \sqrt{3}$ であり,

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2 - 1} \\ \Leftrightarrow x^2 &= y^2 + 1 \end{aligned}$$

となるから、求める体積は

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{\sqrt{3}} x^2 dy &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} (y^2 + 1) dy \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} y^3 + y \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{3}\pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 2\sqrt{3}\pi$$

(4)

$y = xe^x + 1$ より $y' = (x+1)e^x$ となる。よって $x=1$ のとき $y=e+1$, $y'=2e$ であるから、 $x=1$ に対応する点の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2e(x-1) + e+1 \\ &= 2ex - e + 1 \end{aligned}$$

となり、法線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2e}(x-1) + e+1 \\ &= -\frac{x}{2e} + e+1 + \frac{1}{2e} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \text{ 接線: } y = 2ex - e + 1, \text{ 法線: } y = -\frac{x}{2e} + e + 1 + \frac{1}{2e}$$

IV

- (1) $\overrightarrow{AB}=(-1, 1, 0), \overrightarrow{AC}=(-1, 0, -1)$ であるから、平面 α の法線ベクトルを
 $\vec{n}=(a, b, c)$

とおくと、

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow b = a$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow c = -a$$

$$\therefore \vec{n} = a(1, 1, -1)$$

となる。よって平面 α 上の任意の点の位置ベクトルを $\vec{p}=(x, y, z)$ とおくと、

$$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \overrightarrow{OA}) = 0$$

が成り立つので、平面の方程式 α は

$$1 \cdot (x-1) + 1 \cdot y - 1 \cdot z = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y - z = 1$$

となる。

(答) $x + y - z = 1$

- (2) $\triangle OAT, \triangle OBT, \triangle OCT$ に三平方の定理を用いると、 $OA=OB=OC$ と OT 共通より、
 $TA=TB=TC$ が成り立つので、点 T は $\triangle ABC$ の外心である。また、 $\triangle ABC$ は正三角形であるから、点 T は $\triangle ABC$ の重心でもある。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} \\ &= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right)\end{aligned}$$

となる。

(答) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right)$

- (3) OA, OB, OC は互いに垂直なので、四面体 $ABCD$ の体積は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times OA \times OB \times OC = \frac{1}{6}$$

である。 $\triangle ABC$ の面積を S とすると、四面体 $ABCD$ の体積は

$$\frac{1}{3} S \times OT$$

としても求めることができるので、

$$\frac{1}{3} S \times OT = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{S}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore S = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。

(答) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

- (4) 四面体 $ABCD$ の体積は、(3)より $\frac{1}{6}$ である。

(答) $\frac{1}{6}$

(1)

$\int_0^{\pi} f(t) \sin t dt = k$ とおくと、与式より $f(x) = x^2 + k$ となるから、

$$\begin{aligned} k &= \int_0^{\pi} (t^2 + k) \sin t dt \\ &= k[-\cos t]_0^{\pi} + [-t^2 \cos t]_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} t \cos t dt \\ &= 2k + \pi^2 + 2[t \sin t]_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} \sin t dt \\ &= 2k + \pi^2 - 2[-\cos t]_0^{\pi} \\ &= 2k + \pi^2 - 4 \end{aligned}$$

$$\therefore k = 4 - \pi^2$$

となる。よって

$$f(x) = x^2 + 4 - \pi^2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = x^2 + 4 - \pi^2$$

(2)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t dt = l$ とおくと、 $f(x) = x^2 + l$ であるから、

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2 + l) \sin t dt \\ &= \left[-(t^2 + l) \cos t + 2t \sin t + 2 \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi + l - 2 \\ &\Leftrightarrow \pi = 2 \end{aligned}$$

となり、矛盾してしまう。よって題意は示された。

(証明終)