

(1)

$x \geq 5$  のとき、与えられた不等式は、

$$\begin{aligned} x-5 &> \frac{3x-2}{2} \\ \Leftrightarrow x &< -8 \end{aligned}$$

となるので、 $x \geq 5$  のとき解をもたない。 $x < 5$  のとき、与えられた不等式は、

$$\begin{aligned} -x+5 &> \frac{3x-2}{2} \\ \Leftrightarrow x &< \frac{12}{5} \end{aligned}$$

となる。 $x < \frac{12}{5}$  を満たす任意の  $x$  は  $x < 5$  を満たす。よって、求める解は、

$$x < \frac{12}{5}$$

である。

$$(\text{答}) \quad x < \frac{12}{5}$$

(2)

真数条件より、

$$\begin{aligned} x &> -5 \text{ かつ } x > 1 \\ \Leftrightarrow x &> 1 \end{aligned}$$

である。対数の底  $0.5 < 1$  であることに注意すると、与えられた不等式は、

$$\begin{aligned} \log_{0.5}(x+5) &< 2\log_{0.5}(x-1) \\ \Leftrightarrow x+5 &> (x-1)^2 \text{ かつ } x > 1 \\ \Leftrightarrow x^2-3x-4 &< 0 \text{ かつ } x > 1 \\ \Leftrightarrow (x-4)(x+1) &< 0 \text{ かつ } x > 1 \\ \Leftrightarrow -1 < x < 4 \text{ かつ } x > 1 \\ \Leftrightarrow 1 < x < 4 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 1 < x < 4$$

(3)

与えられた関数を微分すると、

$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{x^2-5x+6}{x-1} \right)' \\ &= \frac{(2x-5)(x-1) - (x^2-5x+6)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y' = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

(4)

$x = 3\sin\theta$  とおくと、 $dx = 3\cos\theta d\theta$  であり、 $x$  と  $\theta$  の対応は下表のようになる。

|          |   |               |                 |
|----------|---|---------------|-----------------|
| $x$      | 0 | $\rightarrow$ | $\frac{3}{2}$   |
| $\theta$ | 0 | $\rightarrow$ | $\frac{\pi}{6}$ |

したがって、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{6}{\sqrt{9-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{6}{\sqrt{9(1-\sin^2\theta)}} \cdot 3\cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{6}{3|\cos\theta|} \cdot 3\cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{6}{3\cos\theta} \cdot 3\cos\theta d\theta \quad (\because 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \text{ で } \cos\theta > 0) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 6 d\theta \\ &= [6\theta]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \pi$$

# Ⅱ

(1)

$f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) とおく。これに  $(x, f(x)) = (1, 4), (-1, 0), (-2, 7)$  を代入すると,

$$\begin{cases} 4 = a + b + c \\ 0 = a - b + c \\ 7 = 4a - 2b + c \end{cases}$$

$$\therefore (a, b, c) = (3, 2, -1)$$

を得る。これは  $a \neq 0$  を満たす。よって,

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

(2)

$\overline{AP} = (p-1, 3p^2 + 2p - 5), \overline{AC} = (-3, 3)$  であるので,

$$\begin{aligned} (\triangle ACP \text{ の面積}) &= \frac{1}{2} |3(p-1) - (-3) \cdot (3p^2 + 2p - 5)| \\ &= \frac{9}{2} |p^2 + p - 2| \\ &= \frac{9}{2} |(p-1)(p+2)| \end{aligned}$$

となる。ここで,  $-2 < p \leq -1$  より,

$$(p-1)(p+2) < 0$$

である。よって,

$$(\triangle ACP \text{ の面積}) = -\frac{9}{2} (p^2 + p - 2)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{9}{2} (p^2 + p - 2)$$

(3)

(2)より,  $\triangle ACP$  の面積を平方完成すると,

$$-\frac{9}{2} (p^2 + p - 2) = -\frac{9}{2} \left[ \left( p + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} \right]$$

となる。 $-2 < p \leq -1$  より, これは  $p = -1$  で最大値をとる。よって, 求める点 P の座標は  $(-1, 0)$  である。

$$(\text{答}) \quad (-1, 0)$$

(1)

$a_n$  を部分分数分解すると,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

となるので,  $n \geq 2$  のとき,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{3(n+1)(n+2) - 2(n+1) - 2(n+2)}{4(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

となる。また,  $n=10$  のときを考えると,

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{10 \cdot 35}{4 \cdot 11 \cdot 12} \\ &= \frac{175}{264} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}, \quad S_{10} = \frac{175}{264}$$

(2)

(1)の結果を用いると,

$$\begin{aligned} S &= 2(S_{70} - S_7) \\ &= 2 \left( \frac{70 \cdot 215}{4 \cdot 71 \cdot 72} - \frac{7 \cdot 26}{4 \cdot 8 \cdot 9} \right) \\ &= \frac{7}{71 \cdot 72} (5 \cdot 215 - 13 \cdot 71) \\ &= \frac{133}{639} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{133}{639}$$

# IV

(1)

仮定より,

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n} \\ \overrightarrow{OQ} = \frac{n}{m+n}\vec{b} \\ \overrightarrow{OR} = \frac{m}{m+n}\vec{a} \end{cases}$$

となる。

$$(答) \begin{cases} \overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n} \\ \overrightarrow{OQ} = \frac{n}{m+n}\vec{b} \\ \overrightarrow{OR} = \frac{m}{m+n}\vec{a} \end{cases}$$

(2)

(1)より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} \\ &= \frac{m\vec{a} - n\vec{b}}{m+n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} \\ &= \frac{n\vec{a} + (m-n)\vec{b}}{m+n} \end{aligned}$$

となる。よって,

$$|\overrightarrow{QR}|^2 = \frac{m^2|\vec{a}|^2 - 2mn\vec{a} \cdot \vec{b} + n^2|\vec{b}|^2}{(m+n)^2}$$

$$|\overrightarrow{QP}|^2 = \frac{n^2|\vec{a}|^2 + 2n(m-n)\vec{a} \cdot \vec{b} + (m-n)^2|\vec{b}|^2}{(m+n)^2}$$

$$\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QP} = \frac{mn|\vec{a}|^2 + (m^2 - mn - n^2)\vec{a} \cdot \vec{b} - n(m-n)|\vec{b}|^2}{(m+n)^2}$$

となる。

$$(答) \begin{cases} |\overrightarrow{QR}|^2 = \frac{m^2|\vec{a}|^2 - 2mn\vec{a} \cdot \vec{b} + n^2|\vec{b}|^2}{(m+n)^2} \\ |\overrightarrow{QP}|^2 = \frac{n^2|\vec{a}|^2 + 2n(m-n)\vec{a} \cdot \vec{b} + (m-n)^2|\vec{b}|^2}{(m+n)^2} \\ \overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QP} = \frac{mn|\vec{a}|^2 + (m^2 - mn - n^2)\vec{a} \cdot \vec{b} - n(m-n)|\vec{b}|^2}{(m+n)^2} \end{cases}$$

(3)

G は三角形 OAB の重心であるので,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}$$

である。また, H は三角形 PQR の重心であるので,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}}{3} \\ &= \frac{(n+m)\vec{a} + (n+m)\vec{b}}{3(m+n)} \\ &= \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} \end{aligned}$$

である。したがって,  $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$  となり G と H は一致する。

(証明終)