

I

(1)

3個の a と2個の b と1個の c の並べ方は

$$\frac{6!}{3!2!1!} = 60 \text{ (通り)}$$

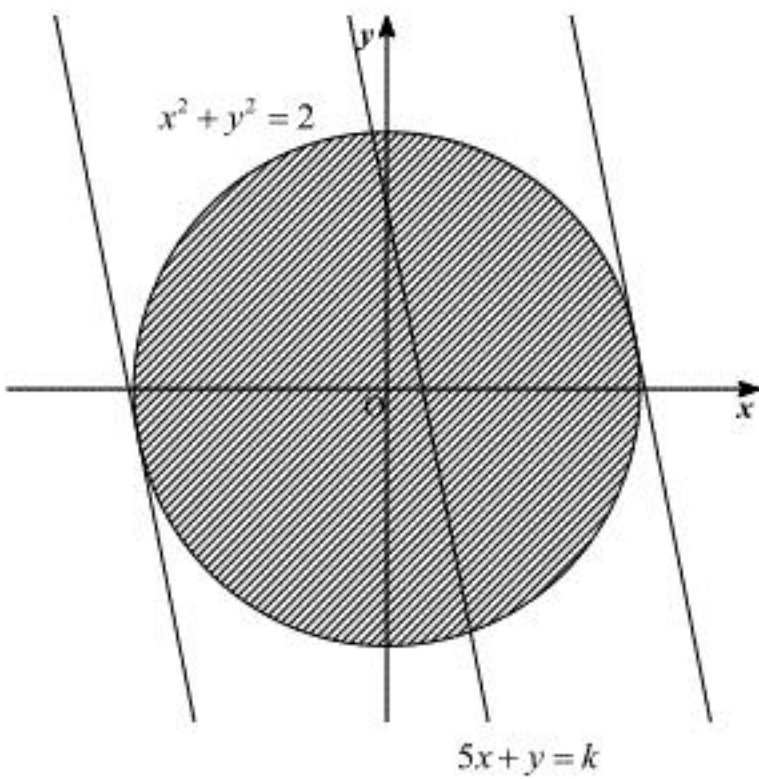
であるから、求める値は

$$60 \cdot 1^3 \cdot 2^2 \cdot 3 = 720$$

となる。

(答) 720

(2)



$5x + y = k$ とおく。直線 $5x + y = k$ が上図の斜線部(境界含む)と共有点を持つような k の最大値と最小値を求めればよい。直線 $5x + y = k$ が上図の斜線部と共有点を持つとき、円 $x^2 + y^2 = 2$ の中心と直線 $5x + y = k$ の距離が円の半径以下であるから、

$$\begin{aligned} \frac{|5 \cdot 0 + 0 - k|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} &\leq \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow |k| &\leq 2\sqrt{13} \\ \therefore -2\sqrt{13} &\leq k \leq 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

となる。よって、 $5x + y$ の最大値は $2\sqrt{13}$ であり、最小値は $-2\sqrt{13}$ となる。

(答) 最大値： $2\sqrt{13}$ ，最小値： $-2\sqrt{13}$

(3)

(i)

$$\begin{aligned} \log_{10} 5^{15} &= 15 \log_{10} 5 \\ &= 15 \log_{10} \frac{10}{2} \\ &= 15(1 - \log_{10} 2) \\ &= 15 \cdot 0.699 \\ &= 10.485 \end{aligned}$$

より、

$$10^{10} \leq 5^{15} < 10^{11}$$

となるから、 5^{15} は11桁である。

(答) 11桁

(ii)

$$\begin{aligned} \log_{10} 2^{40} &= 40 \log_{10} 2 \\ &= 12.040 \\ &> 10.485 \end{aligned}$$

より、 $5^{15} < 2^{40}$ となる。

(答) $5^{15} < 2^{40}$

(4)

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = -x^2 + 2x + 4 \end{cases} \\ \Rightarrow x^2 + 1 = -x^2 + 2x + 4 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

であるから、2つのグラフの交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、 α, β は方程式①の2解である。解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\beta = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \sqrt{(\beta - \alpha)^2} \quad (\because \beta > \alpha) \\ &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

を得る。したがって、2つのグラフが囲む面積は

$$\begin{aligned} -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx &= \frac{2}{6} (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{7\sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{7\sqrt{7}}{3}$

II

(1)

$$f(x) = x^3 - x \text{ とおくと,}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

であるから, 求める方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ &= (3t^2 - 1)(x-t) + t^3 - t \\ &= (3t^2 - 1)x - 2t^3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$$

(2)

(1)より2つの接線の方程式は

$$\begin{cases} y = (3t^2 - 1)x - 2t^3 \\ y = (3s^2 - 1)x - 2s^3 \end{cases}$$

となる。これらが一致するとき,

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3t^2 - 1 = 3s^2 - 1 \\ -2t^3 = -2s^3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = s^2 \\ t^3 = s^3 \end{cases} \\ \Rightarrow t^3 = s^3 \\ \therefore t = s \end{aligned}$$

となるから, 題意は示された。

(証明終)

(3)

接線 $y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$ が点 A を通るとき

$$\begin{aligned} b &= (3t^2 - 1)a - 2t^3 \\ \Leftrightarrow 2t^3 - 3at^2 + a + b &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を満たす。(2)で示したことにより, 点 A から C 上にひける接線の本数は, 上式①の t の解の個数に等しい。ここで $g(t) = 2t^3 - 3at^2 + a + b$ とおくと

$$g'(t) = 6t^2 - 6at = 6t(t - a)$$

となる。 $g(t) = 0$ がちょうど2つの解を持つ条件は, $g(t)$ が極大値と極小値を持ち, かつそのいずれかが0となることであるから,

$$\begin{aligned} a \neq 0 \text{ かつ } g(0)g(a) &= 0 \\ \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ かつ } (a+b)(-a^3 + a + b) &= 0 \end{aligned}$$

となるが, 点 A は C 上にないから

$$\begin{aligned} b &\neq a^3 - a \\ \Leftrightarrow -a^3 + a + b &\neq 0 \end{aligned}$$

となるので, 求める条件は

$$a + b = 0 \text{ かつ } a \neq 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a + b = 0 \text{ かつ } a \neq 0$$

(4)

①式と(3)の結論により

$$\begin{aligned} 2t^3 - 3at^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2(2t - 3a) &= 0 \\ \Leftrightarrow t = 0, \frac{3}{2}a \end{aligned}$$

となるから, 2つの接線の傾きは

$$\begin{cases} f'(0) = -1 \\ f'\left(\frac{3}{2}a\right) = \frac{27}{4}a^2 - 1 \end{cases}$$

となる。よってこれらが直交するとき

$$\begin{aligned} f'(0)f'\left(\frac{3}{2}a\right) &= -1 \\ \Leftrightarrow \frac{27}{4}a^2 - 1 &= 1 \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{8}{27} \\ \therefore a &= \pm \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm \frac{2}{9}\sqrt{6} \end{aligned}$$

となる。よって(3)の結果より, 求める値は

$$(a, b) = \left(\pm \frac{2}{9}\sqrt{6}, \mp \frac{2}{9}\sqrt{6} \right) \quad (\text{複号同順})$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (a, b) = \left(\pm \frac{2}{9}\sqrt{6}, \mp \frac{2}{9}\sqrt{6} \right) \quad (\text{複号同順})$$

III

(1)

$x \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-3)(x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \quad (\because x \geq 0) \end{aligned}$$

となり、 $x < 0$ のとき

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -3 \quad (\because x < 0) \end{aligned}$$

となるから、解は

$$x = \pm 3$$

である。

(答) $x = \pm 3$

(2)

直線 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - 10$ と x 軸がなす角を α ($0 < \alpha < \pi$)、直線 $y = -3\sqrt{3}x + 2$ と x 軸となす角を

β ($0 < \beta < \pi$) とすると、 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\tan \beta = -3\sqrt{3}$ である。よって $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ となり、 0

$\leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ であるから、

$$\theta = \beta - \alpha \text{ または } \pi - (\beta - \alpha)$$

である。 $\tan \theta \geq 0$ より、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= |\tan(\beta - \alpha)| \\ &= \left| \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| \\ &= \left| \frac{-3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-3\sqrt{3})} \right| \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ であるから、

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

を得る。

(答) $\theta = \frac{\pi}{3}$

(3)

真数条件より

$$\begin{aligned} \begin{cases} x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x > 1 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、

$$\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 \sqrt{2}} = 2 \log_2(x-1)$$

より、 $\textcircled{1}$ の下で、

$$2 \log_2(x-1) \leq 1 + \log_2(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 \leq \log_2 2(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 2(x+1) \quad (\because 2 > 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{5} \leq x \leq 2 + \sqrt{5}$$

が成り立つ。 $\textcircled{1}$ と合わせて、

$$1 < x \leq 2 + \sqrt{5} \quad (\because x > 1)$$

を得る。

(答) $1 < x \leq 2 + \sqrt{5}$

(4)

$$\begin{aligned} \sin(x+50^\circ) + \cos(x+20^\circ) &= \sin(x+50^\circ) + \cos\{90^\circ - (70^\circ - x)\} \\ &= \sin(x+50^\circ) + \sin(70^\circ - x) \\ &= 2 \sin \frac{(x+50^\circ) + (70^\circ - x)}{2} \cos \frac{(x+50^\circ) - (70^\circ - x)}{2} \\ &= 2 \sin 60^\circ \cos(x-10^\circ) \\ &= \sqrt{3} \cos(x-10^\circ) \end{aligned}$$

となる。ここで $-10^\circ \leq x-10^\circ \leq 350^\circ$ であるから、 $x=10^\circ$ のときに最大値 $\sqrt{3}$ をとる。

(答) $\sqrt{3} \quad (x=10^\circ)$

IV

(1)

$$\begin{aligned}(a-1)(x+1)-(a+1)y &= 0 \\ \Leftrightarrow a(x-y+1)-(x+y+1) &= 0\end{aligned}$$

と変形できる。これが a の値に因らず成り立つとき、

$$\begin{aligned}\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (x, y) = (-1, 0)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) (x, y) = (-1, 0)$$

(2)

l_1, l_2 の交点を (X, Y) とすると、

$$\begin{aligned}\begin{cases} (a-1)(X+1)+(a+1)Y=0 \\ aX-Y-1=0 \end{cases} & \dots \textcircled{1} \\ & \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

が成り立つ。 $X \neq 0$ のとき、②式より、

$$a = \frac{Y+1}{X}$$

となる。これを①式に代入すると

$$\begin{aligned}\left(\frac{Y+1}{X}-1\right)(X+1)-\left(\frac{Y+1}{X}+1\right)Y &= 0 \\ \Leftrightarrow X^2+Y^2 &= 1\end{aligned}$$

となる。また、 $X=0$ のとき②式より $Y=-1$ であり、①式に代入すると

$$\begin{aligned}(a-1)+(a+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 0\end{aligned}$$

となるから $(0, -1)$ も軌跡に含まれる。よって求める軌跡は、

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \text{ または } (x, y) = (0, -1)$$

であり、これはつまり、円 $x^2+y^2=1$ から点 $(0, 1)$ を除いたものである。

$$(\text{答}) \text{ 円 } x^2+y^2=1, \text{ ただし点 } (0, 1) \text{ を除く}$$

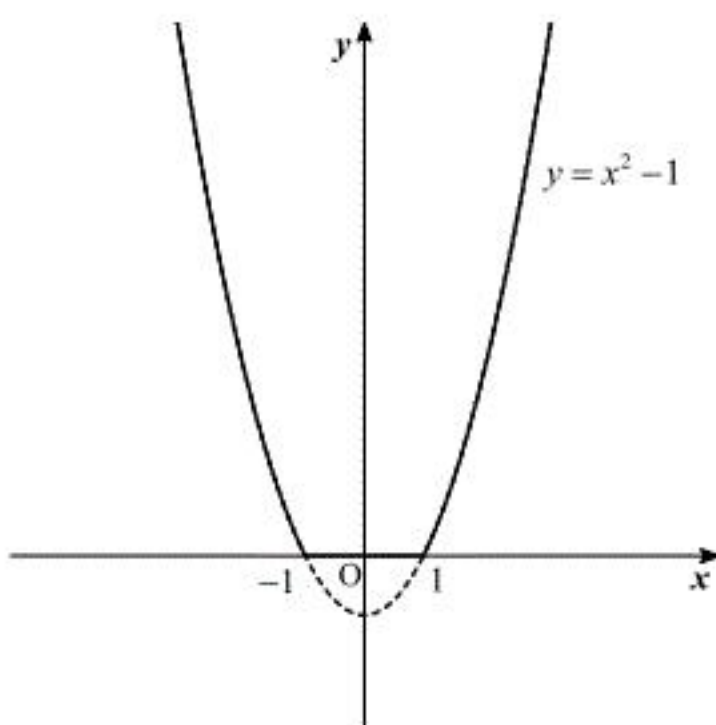
(1)

$$\begin{aligned} M(\alpha, \beta) &= \alpha + \beta - m(\alpha, \beta) \\ &= \begin{cases} \alpha + \beta - \beta & (\alpha \geq \beta \text{ のとき}) \\ \alpha + \beta - \alpha & (\alpha < \beta \text{ のとき}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha & (\alpha \geq \beta \text{ のとき}) \\ \beta & (\alpha < \beta \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

となるから、

$$g(x) = M(0, x^2 - 1) = \begin{cases} 0 & (0 \geq x^2 - 1 \text{ のとき}) \\ x^2 - 1 & (0 < x^2 - 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。したがって、 $g(x) = M(0, x^2 - 1)$ のグラフは下ようになる。



(答) 前図

(2)

$$m(f(x), g(x)) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$$

がすべての x で成り立てばよい。ここで、(1)より

$$\text{すべての } x \text{ について } f(x) \leq g(x)$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \text{ のとき } f(x) \leq 0 \quad \text{かつ} \quad x < -1, x > 1 \text{ のとき } f(x) \leq x^2 - 1$$

となる。まず $a \geq 0$ のときを考える。 $x \geq 0$ とすると、

$$g(-x) = g(x)$$

$$f(-x) = -(-x-a)^2 + b \leq -(x-a)^2 + b = f(x)$$

であるから、 $x \geq 0$ について $f(x) \leq g(x)$ が成り立てば、すべての x について $f(x) \leq g(x)$ が成り立つ。したがって、

$$0 \leq x \leq 1 \text{ のとき } f(x) \leq 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

かつ

$$x > 1 \text{ のとき } f(x) \leq x^2 - 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立てばよい。

まず①について、 $y = f(x)$ は頂点が (a, b) で上に凸の曲線であるから

$$0 \leq x \leq 1 \text{ のとき } f(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq 1 \\ b \leq 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a > 1 \\ f(1) \leq 0 \end{cases}$$

となる。ここで

$$f(1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -(1-a)^2 + b \leq 0$$

$$\Leftrightarrow b \leq (a-1)^2$$

となるから、結局

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq 1 \\ b \leq 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a > 1 \\ b \leq (a-1)^2 \end{cases} \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。

次に、②について

$$x > 1 \text{ のとき } f(x) \leq x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow x > 1 \text{ のとき } 2x^2 - 2ax + a^2 - b - 1 \geq 0$$

である。 $h(x) = 2x^2 - 2ax + a^2 - b - 1$ とおけば、

$$h(x) = 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} - b - 1$$

であるから、 $\frac{a}{2} \leq 1$ のとき

$$h(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow h(1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -f(1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow b \leq (a-1)^2$$

であり、 $\frac{a}{2} > 1$ のとき

$$\frac{a^2}{2} - b - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow b \leq \frac{a^2}{2} - 1$$

となる。よって

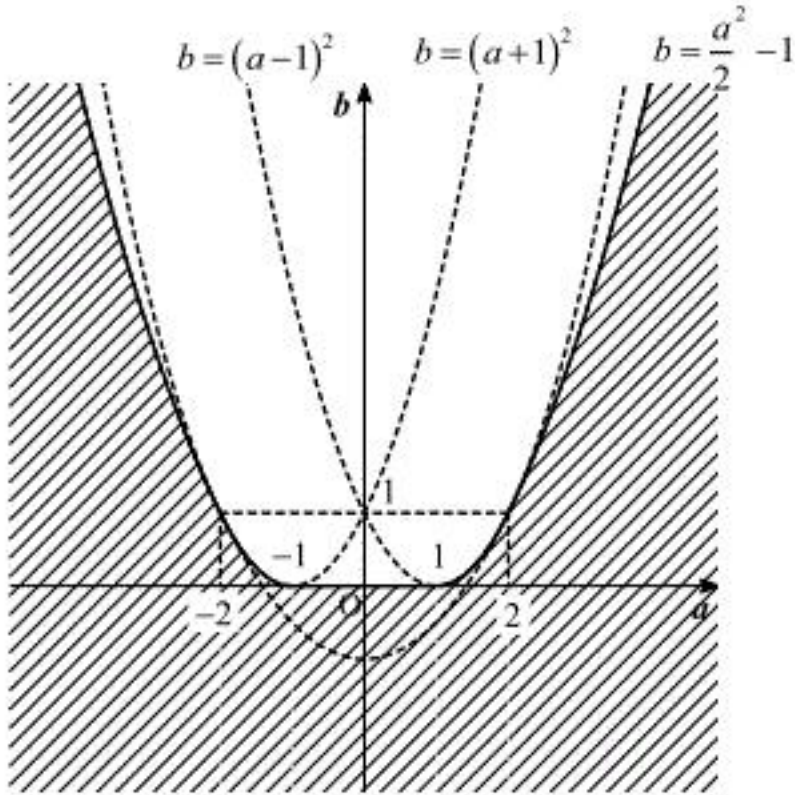
$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq 2 \\ b \leq (a-1)^2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a > 2 \\ b \leq \frac{a^2}{2} - 1 \end{cases} \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。したがって、③、④と、 y 軸に関する対称性を考えれば

$$m(f(x), g(x)) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a| \leq 1 \text{ のとき} & b \leq 0 \\ 1 < |a| \leq 2 \text{ のとき} & b \leq (|a|-1)^2 \\ 2 < |a| \text{ のとき} & b \leq \frac{|a|^2}{2} - 1 \end{cases}$$

を得る。これを図示すれば下図ようになる。ただし境界はすべて含む。



(答) 前図(境界含む)