

I

(1)

3個の a と2個の b と1個の c の並べ方は

$$\frac{6!}{3!2!1!} = 60 \text{ (通り)}$$

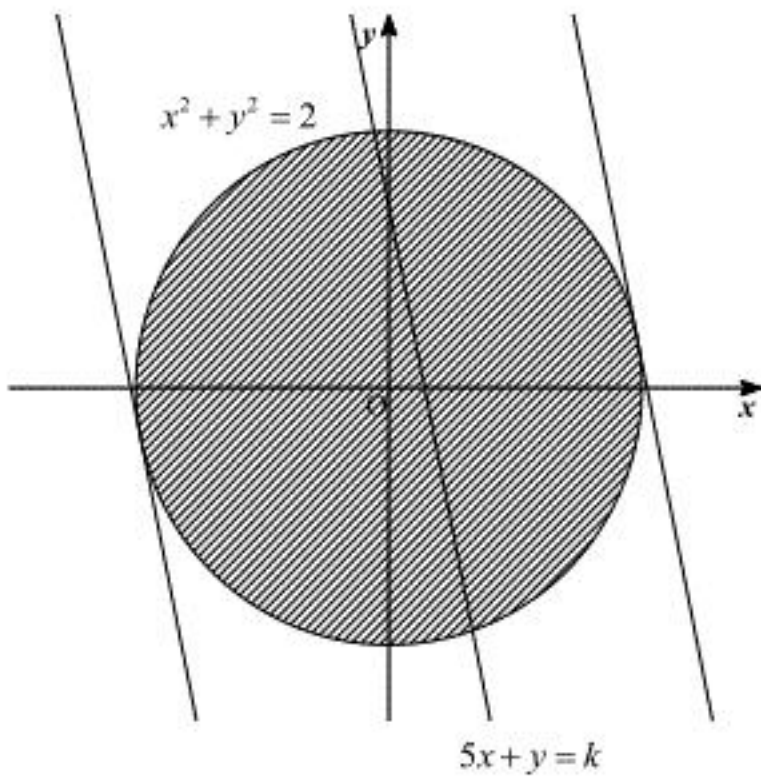
であるから、求める値は

$$60 \cdot 1^3 \cdot 2^2 \cdot 3 = 720$$

となる。

(答) 720

(2)



$5x + y = k$ とおく。直線 $5x + y = k$ が上図の斜線部(境界含む)と共有点を持つような k の最大値と最小値を求めればよい。直線 $5x + y = k$ が上図の斜線部と共有点を持つとき、円 $x^2 + y^2 = 2$ の中心と直線 $5x + y = k$ の距離が円の半径以下であるから、

$$\begin{aligned} \frac{|5 \cdot 0 + 0 - k|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} &\leq \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow |k| &\leq 2\sqrt{13} \\ \therefore -2\sqrt{13} &\leq k \leq 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

となる。よって、 $5x + y$ の最大値は $2\sqrt{13}$ であり、最小値は $-2\sqrt{13}$ となる。

(答) 最大値： $2\sqrt{13}$ ，最小値： $-2\sqrt{13}$

(3)

(i)

$$\begin{aligned} \log_{10} 5^{15} &= 15 \log_{10} 5 \\ &= 15 \log_{10} \frac{10}{2} \\ &= 15(1 - \log_{10} 2) \\ &= 15 \cdot 0.699 \\ &= 10.485 \end{aligned}$$

より、

$$10^{10} < 5^{15} < 10^{11}$$

となるから、 5^{15} は11桁である。

(答) 11桁

(ii)

$$\begin{aligned} \log_{10} 2^{40} &= 40 \log_{10} 2 \\ &= 12.040 \\ &> 10.485 \end{aligned}$$

より、 $5^{15} < 2^{40}$ となる。

(答) $5^{15} < 2^{40}$

(4)

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = -x^2 + 2x + 4 \end{cases} \\ \Rightarrow x^2 + 1 = -x^2 + 2x + 4 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

であるから、2つのグラフの交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、 α, β は方程式①の2解である。解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\beta = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \sqrt{(\beta - \alpha)^2} \quad (\because \beta > \alpha) \\ &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

を得る。したがって、2つのグラフが囲む面積は

$$\begin{aligned} -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx &= \frac{2}{6} (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{7\sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{7\sqrt{7}}{3}$

Ⅱ

(1)

$f(x) = x^3 - x$ とおくと、

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

であるから、求める方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ &= (3t^2 - 1)(x-t) + t^3 - t \\ &= (3t^2 - 1)x - 2t^3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$$

(2)

(1)より2つの接線の方程式は

$$\begin{cases} y = (3t^2 - 1)x - 2t^3 \\ y = (3s^2 - 1)x - 2s^3 \end{cases}$$

となる。これらが一致するとき、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 3t^2 - 1 = 3s^2 - 1 \\ -2t^3 = -2s^3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = s^2 \\ t^3 = s^3 \end{cases} \\ &\Rightarrow t^3 = s^3 \\ &\therefore t = s \end{aligned}$$

となるから、題意は示された。

(証明終)

(3)

接線 $y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$ が点 A を通るとき

$$\begin{aligned} b &= (3t^2 - 1)a - 2t^3 \\ \Leftrightarrow 2t^3 - 3at^2 + a + b &= 0 \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

を満たす。(2)で示したことにより、点 A から C 上にひける接線の本数は、上式①の t の解の個数に等しい。ここで $g(t) = 2t^3 - 3at^2 + a + b$ とおくと

$$g'(t) = 6t^2 - 6at = 6t(t - a)$$

となる。 $g(t) = 0$ がちょうど2つの解を持つ条件は、 $g(t)$ が極大値と極小値を持ち、かつそのいずれかが0となることであるから、

$$\begin{aligned} a \neq 0 \text{ かつ } g(0)g(a) &= 0 \\ \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ かつ } (a+b)(-a^3 + a + b) &= 0 \end{aligned}$$

となるが、点 A は C 上にないから

$$\begin{aligned} b &\neq a^3 - a \\ \Leftrightarrow -a^3 + a + b &\neq 0 \end{aligned}$$

となるので、求める条件は

$$a + b = 0 \text{ かつ } a \neq 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a + b = 0 \text{ かつ } a \neq 0$$

(4)

①式と(3)の結論により

$$\begin{aligned} 2t^3 - 3at^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2(2t - 3a) &= 0 \\ \Leftrightarrow t = 0, \frac{3}{2}a \end{aligned}$$

となるから、2つの接線の傾きは

$$\begin{cases} f'(0) = -1 \\ f'\left(\frac{3}{2}a\right) = \frac{27}{4}a^2 - 1 \end{cases}$$

となる。よってこれらが直交するとき

$$\begin{aligned} f'(0)f'\left(\frac{3}{2}a\right) &= -1 \\ \Leftrightarrow \frac{27}{4}a^2 - 1 &= 1 \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{8}{27} \\ \therefore a &= \pm \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm \frac{2}{9}\sqrt{6} \end{aligned}$$

となる。よって(3)の結果より、求める値は

$$(a, b) = \left(\pm \frac{2}{9}\sqrt{6}, \mp \frac{2}{9}\sqrt{6} \right) \quad (\text{複号同順})$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (a, b) = \left(\pm \frac{2}{9}\sqrt{6}, \mp \frac{2}{9}\sqrt{6} \right) \quad (\text{複号同順})$$

III

(1)

$$\begin{aligned}\sqrt{(n+1)(n+3)} - \sqrt{n(n+2)} &= \frac{(n+1)(n+3) - n(n+2)}{\sqrt{(n+1)(n+3)} + \sqrt{n(n+2)}} \\ &= \frac{2n+3}{\sqrt{(n+1)(n+3)} + \sqrt{n(n+2)}} \\ &= \frac{2 + \frac{3}{n}}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{3}{n}\right)} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}}\end{aligned}$$

となるから、求める極限值は

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{(n+1)(n+3)} - \sqrt{n(n+2)} \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{3}{n}\right)} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 \cdot 1} + \sqrt{1}} \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。

(答) 1

(2)

(i)

求める点は

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta) \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) + \beta &= (1+i) \cdot \frac{\sqrt{3}+i}{2} + 3-3i \\ &= \frac{\sqrt{3}+5}{2} + \frac{\sqrt{3}-5}{2}i\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\sqrt{3}+5}{2} + \frac{\sqrt{3}-5}{2}i$

(ii)

$$\begin{aligned}\beta &= 3\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \\ &= 3\sqrt{2} \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right\}\end{aligned}$$

となるから、ド・モアブルの定理より

$$\beta^6 = \left(3\sqrt{2} \right)^6 \left\{ \cos \left(-\frac{3}{2}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{3}{2}\pi \right) \right\} = 5832i$$

となる。

(答) 5832i

(3)

(i)

点Hは直線BC上の点であるから、実数sを用いて、

$$\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AB} + (1-s)\overrightarrow{AC}$$

とかける。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} &= \left\{ s\overrightarrow{AB} + (1-s)\overrightarrow{AC} \right\} \cdot \left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \right) \\ &= -s\left| \overrightarrow{AB} \right|^2 + (1-s)\left| \overrightarrow{AC} \right|^2 + (2s-1)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= -25s + 9(1-s) + (2s-1)\left| \overrightarrow{AB} \right|\left| \overrightarrow{AC} \right|\cos \angle BAC \\ &= -34s + 9 + (2s-1) \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \\ &= -24s + 4\end{aligned}$$

であるが、 $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ より、これは0に等しい。したがって

$$\begin{aligned}-24s + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow s &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

となるので

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$$

を得る。

(答) $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$

(ii)

(i)の結果を用いると

$$\begin{aligned}\left| \overrightarrow{AH} \right|^2 &= \left| \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC} \right|^2 \\ &= \frac{1}{36} \left(\left| \overrightarrow{AB} \right|^2 + 10\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 25\left| \overrightarrow{AC} \right|^2 \right) \\ &= \frac{1}{36} \left(25 + 10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} + 25 \cdot 9 \right) \\ &= \frac{25}{3}\end{aligned}$$

$$\therefore \left| \overrightarrow{AH} \right| = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

となる。

(答) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

IV

(1)

二つの楕円の交点の座標は

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 4 \\ 3x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x^2, y^2) = (1, 1)$$

$$\therefore (x, y) = (\pm 1, \pm 1) \text{ (複号任意)}$$

となる。また、 $3x^2 + y^2 = 4$ と x 軸の交点の x 座標は

$$x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

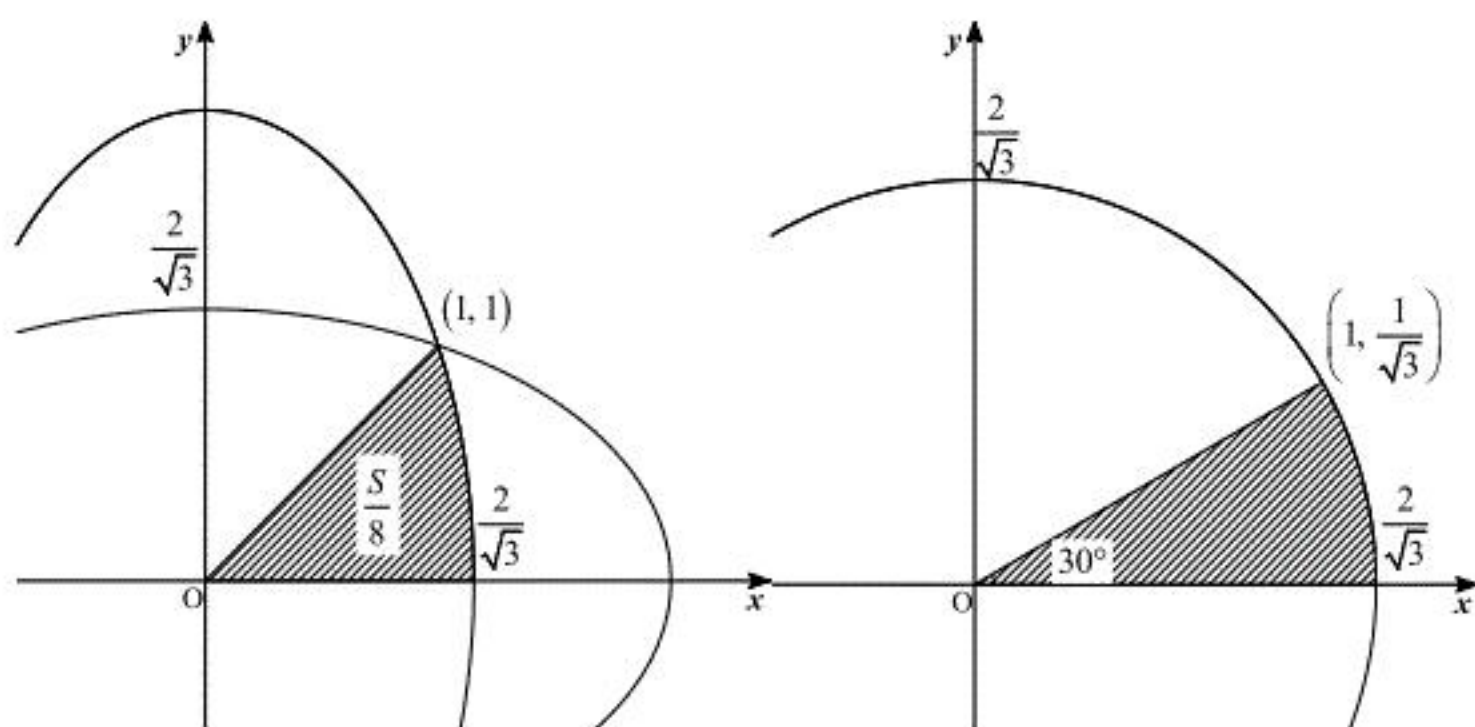
となる。ここで、 $x^2 + 3y^2 = 4$ ($y \geq 0$) 上の点の y 座標を y_1 、 $3x^2 + y^2 = 4$ ($y \geq 0$) 上の点の y 座標を y_2 とすると、 x 軸、 y 軸に関する D の対称性より、求める体積は、

$$\begin{aligned} 2 \left(\pi \int_0^1 y_1^2 dx + \pi \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}} y_2^2 dx \right) &= 2\pi \int_0^1 \frac{4-x^2}{3} dx + 2\pi \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}} (4-3x^2) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{4}{3}x - \frac{1}{9}x^3 \right]_0^1 + 2\pi \left[4x - x^3 \right]_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{32(\sqrt{3}-1)}{9}\pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{32(\sqrt{3}-1)}{9}\pi$$

(2)



求める面積を S とすると、 x 軸、 y 軸、直線 $y=x$ に関する D の対称性より、左上図斜線部の領域の面積は $\frac{S}{8}$ に等しい。また、左上図斜線部の領域を y 軸方向に $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 倍すると、右上図斜線

部のような半径 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 、中心角 30° の扇形となる。よって

$$\begin{aligned} \frac{S}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 \cdot \pi \\ \Leftrightarrow S &= \frac{8\sqrt{3}\pi}{9} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{8\sqrt{3}\pi}{9}$$