

I

(1)

与式より

$$\sqrt{5-2x}=x-2 \quad \dots\dots ①$$

となる。

$$5-2x \geq 0 \text{ かつ } x-2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq \frac{5}{2} \quad \dots\dots ②$$

のもとで①式の両辺を2乗して整理すると

$$5-2x=(x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$$

となる。このうち②式を満たすのは、

$$x=1+\sqrt{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad x=1+\sqrt{2}$$

(2)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}} < \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{30} \log_{10} \frac{1}{2} < \log_{10} \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{30} \log_{10} 2 > 1$$

$$\therefore t > \frac{30}{\log_{10} 2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t > \frac{30}{\log_{10} 2}$$

(3)

$$y' = (x^2)' \log_e x + x^2 (\log_e x)'$$

$$= 2x \log_e x + x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$= 2x \log_e x + x$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y' = 2x \log_e x + x$$

(4)

$$\int_0^1 x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = -\int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^2\right)' e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$= -\left[e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]_0^1$$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{2}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 1 - e^{-\frac{1}{2}}$$

II

(1)

曲線 $y = -x^2 + 4$ と直線 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ の交点は

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -x^2 + 4 = -\frac{1}{2}x + 1$$

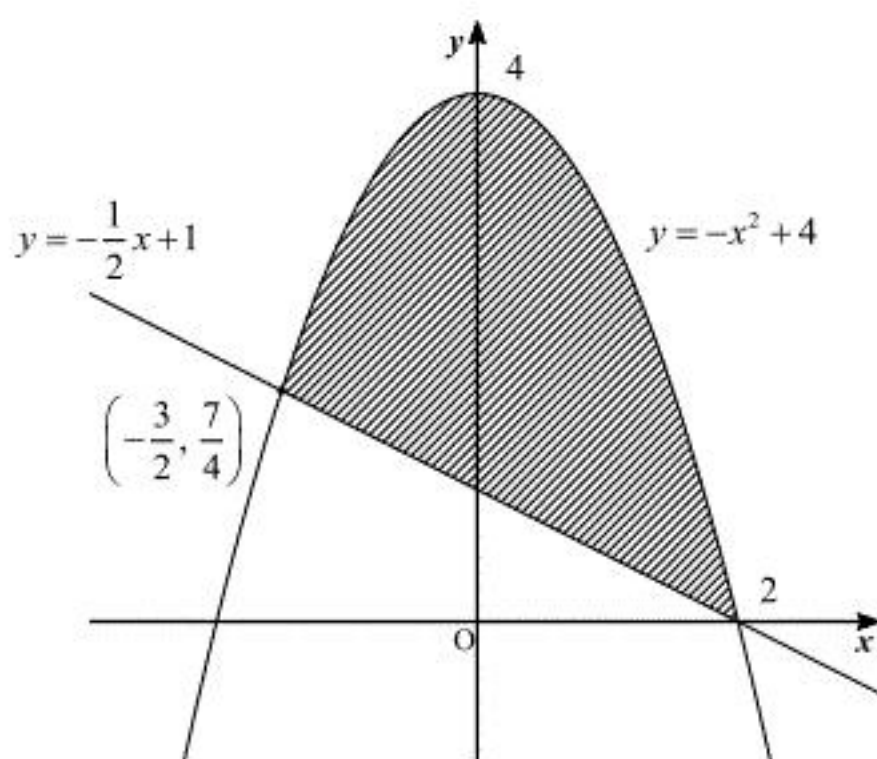
$$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+3)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}, 2$$

$$\therefore (x, y) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right), (2, 0)$$

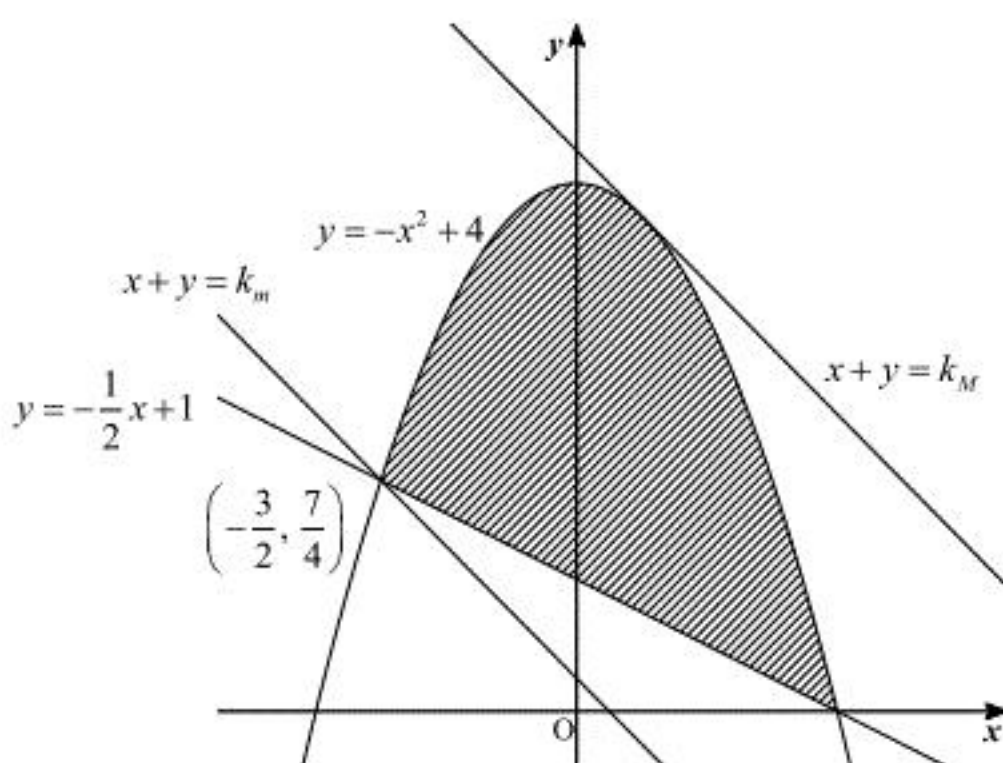
となる。よって求める領域を図示すると下のようになる。ただし境界はすべて含む。



(答) 前図(境界含む)

(2)

$x + y = k$ とおくと、 k はこの直線の y 切片である。よって(1)で求めた領域と直線 $x + y = k$ が共有点を持つようなもののうち、 y 切片が最大のもので最小のものを求めればよい。



よって上図より、直線 $x + y = k$ と放物線が接するときに $x + y$ は最大値 k_M を取り、点

$\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$ を通るときに最小値 k_m を取る。ここで直線と放物線が接するとき、これらを表す方

程式から y を消去した式

$$-x + k = -x^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + k - 4 = 0$$

が重解を持つから、判別式を考えると

$$1 - 4(k - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{17}{4}$$

$$\therefore k_M = \frac{17}{4}$$

となる。また、

$$k_m = -\frac{3}{2} + \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$$

となる。以上より、 $x + y$ の最大値は $\frac{17}{4}$ 、最小値は $\frac{1}{4}$ である。

(答) 最大値: $\frac{17}{4}$, 最小値: $\frac{1}{4}$

III

(1)

$$\begin{aligned} A_2 &= t^2 + \frac{1}{t^2} \\ &= \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2t \cdot \frac{1}{t} \\ &= (\sqrt{2})^2 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= t^3 + \frac{1}{t^3} \\ &= \left(t + \frac{1}{t}\right) \left(t^2 - t \cdot \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) \\ &= \sqrt{2} (A_2 - 1) \\ &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_4 &= t^4 + \frac{1}{t^4} \\ &= \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)^2 - 2 \cdot t^2 \cdot \frac{1}{t^2} \\ &= A_2^2 - 2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $A_2 = 0, A_3 = -\sqrt{2}, A_4 = -2$

(2)

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \left(t + \frac{1}{t}\right) A_n &= \left(t + \frac{1}{t}\right) \left(t^n + \frac{1}{t^n}\right) \\ &= t^{n+1} + \frac{1}{t^{n+1}} + t^{n-1} + \frac{1}{t^{n-1}} \\ &= A_{n+1} + A_{n-1} \\ \Leftrightarrow A_{n+1} &= \sqrt{2} A_n - A_{n-1} \end{aligned}$$

となる。

(答) $A_{n+1} = \sqrt{2} A_n - A_{n-1}$

(3)

$n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) A_n &= \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) \left(t^n + \frac{1}{t^n}\right) \\ &= t^{n+2} + \frac{1}{t^{n+2}} + t^{n-2} + \frac{1}{t^{n-2}} \\ &= A_{n+2} + A_{n-2} \end{aligned}$$

となるが, (1) より $t^2 + \frac{1}{t^2} = 0$ であるから

$$A_{n+2} = -A_{n-2}$$

となる。

(答) $A_{n+2} = -A_{n-2}$

(4)

(1), (3) より, 自然数 k を用いて

$$\begin{cases} A_1 = -A_5 = A_9 = \cdots = \sqrt{2} \\ A_2 = -A_6 = A_{10} = \cdots = 0 \\ A_3 = -A_7 = A_{11} = \cdots = -\sqrt{2} \\ A_4 = -A_8 = A_{12} = \cdots = -2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} A_{4k-3} = (-1)^{k+1} \sqrt{2} \\ A_{4k-2} = 0 \\ A_{4k-1} = (-1)^k \sqrt{2} \\ A_{4k} = (-1)^k 2 \end{cases}$$

となるので, A_n の取りうる値は

$$0, \pm\sqrt{2}, \pm 2$$

となる。

(答) $0, \pm\sqrt{2}, \pm 2$

IV

(1)

微分積分学の基本定理により

$$F'(x) = e^{-px} \sin x$$

となる。

$$(\text{答}) \quad e^{-px} \sin x$$

(2)

$$(e^{-px} \cos x)' = -pe^{-px} \cos x - e^{-px} \sin x = -e^{-px} (p \cos x + \sin x)$$

$$(e^{-px} \sin x)' = -pe^{-px} \sin x + e^{-px} \cos x = -e^{-px} (p \sin x - \cos x)$$

より

$$\begin{aligned} y' &= -Ae^{-px} (p \cos x + \sin x) - Be^{-px} (p \sin x - \cos x) \\ &= -e^{-px} \{(Ap - B) \cos x + (A + Bp) \sin x\} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y' = -e^{-px} \{(Ap - B) \cos x + (A + Bp) \sin x\}$$

(3)

定義式より

$$F(0) = 0$$

であり、 $F(x) = Ae^{-px} \cos x + Be^{-px} \sin x + C$ より

$$F(0) = A + C$$

であるから、

$$A + C = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

となる。また、(1)より

$$F'(0) = 0$$

であり、(2)より

$$F'(0) = -(Ap - B)$$

であるから

$$Ap - B = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

となる。また、(1)より

$$F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}p}$$

であり、(2)より

$$F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}p} (A + Bp)$$

であるから

$$e^{-\frac{\pi}{2}p} = -e^{-\frac{\pi}{2}p} (A + Bp)$$

$$\Leftrightarrow A + Bp = -1 \left(\because e^{-\frac{\pi}{2}p} > 0 \right) \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{3}$$

となる。②、③より B を消去すると

$$Ap^2 + A = -1$$

$$\Leftrightarrow A(p^2 + 1) = -1$$

$$\therefore A = -\frac{1}{p^2 + 1}$$

となり、再び②より

$$B = Ap = -\frac{p}{p^2 + 1}$$

となり、①より

$$C = -A = \frac{1}{p^2 + 1}$$

となる。よって

$$(A, B, C) = \left(-\frac{1}{p^2 + 1}, -\frac{p}{p^2 + 1}, \frac{1}{p^2 + 1} \right)$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad (A, B, C) = \left(-\frac{1}{p^2 + 1}, -\frac{p}{p^2 + 1}, \frac{1}{p^2 + 1} \right)$$

(4)

(3)より $(A, B, C) = \left(-\frac{1}{p^2 + 1}, -\frac{p}{p^2 + 1}, \frac{1}{p^2 + 1} \right)$ とすると

$$F(x) = Ae^{-px} \cos x + Be^{-px} \sin x + C$$

であるから、

$$F(n\pi) = (-1)^n Ae^{-pn\pi} + C$$

となる。よって

$$\begin{aligned} T_1 &= |F(\pi) - F(0)| \\ &= |-Ae^{-p\pi} + C| \\ &= \frac{1}{p^2 + 1} |e^{-p\pi} + 1| \\ &= \frac{e^{-p\pi} + 1}{p^2 + 1} (\because e^{-p\pi} + 1 > 0) \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} T_2 &= |F(2\pi) - F(\pi)| \\ &= |Ae^{-2p\pi} + C + Ae^{-p\pi} - C| \\ &= \frac{e^{-2p\pi} + e^{-p\pi}}{p^2 + 1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad T_1 = \frac{e^{-p\pi} + 1}{p^2 + 1}, T_2 = \frac{e^{-2p\pi} + e^{-p\pi}}{p^2 + 1}$$

(5)

$$\begin{aligned} T_n &= |F(n\pi) - F((n-1)\pi)| \\ &= \left| (-1)^n Ae^{-pn\pi} + C - (-1)^{n-1} Ae^{-p(n-1)\pi} - C \right| \\ &= \left| (-1)^n Ae^{-pn\pi} + (-1)^n Ae^{-p(n-1)\pi} \right| \\ &= \frac{e^{-pn\pi} + e^{-p(n-1)\pi}}{p^2 + 1} \\ &= \frac{e^{-p\pi} + 1}{p^2 + 1} (e^{-p\pi})^{n-1} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} T_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{e^{-p\pi} + 1}{p^2 + 1} \cdot \frac{1 - (e^{-p\pi})^n}{1 - e^{-p\pi}} \right\} \\ &= \frac{e^{-p\pi} + 1}{(p^2 + 1)(1 - e^{-p\pi})} (\because 0 < e^{-p\pi} < 1) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{e^{-p\pi} + 1}{(p^2 + 1)(1 - e^{-p\pi})}$$