

I

(1)

$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ の両辺を3乗すると

$$\omega^3 = \frac{-1+3\sqrt{3}i+9-3\sqrt{3}i}{8} = 1$$

が成り立つ。 $\omega \neq 1$ であるから、 $\omega^3 - 1 = (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$ より

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned}\omega^4 + 2\omega^3 - \omega^2 &= \omega^3(\omega + 2) - (-\omega - 1) \\ &= 2\omega + 3 \\ &= 2 \cdot \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} + 3 \\ &= 2 + \sqrt{3}i\end{aligned}$$

である。

(答) $2 + \sqrt{3}i$

(2)

不等式

$$\log_2 x + \log_2 (x+1) < 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

について考える。真数条件より、 $x > 0$ かつ $x+1 > 0$ であるから、 $x > 0$ である。また、底が1よりも大きいので

$$\begin{aligned}\textcircled{1} &\Leftrightarrow \log_2 x(x+1) < \log_2 2 \\ &\Leftrightarrow x(x+1) < 2 \text{ かつ } x > 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0 \text{ かつ } x > 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)(x-1) < 0 \text{ かつ } x > 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < x < 1\end{aligned}$$

となる。

(答) $0 < x < 1$

(3)

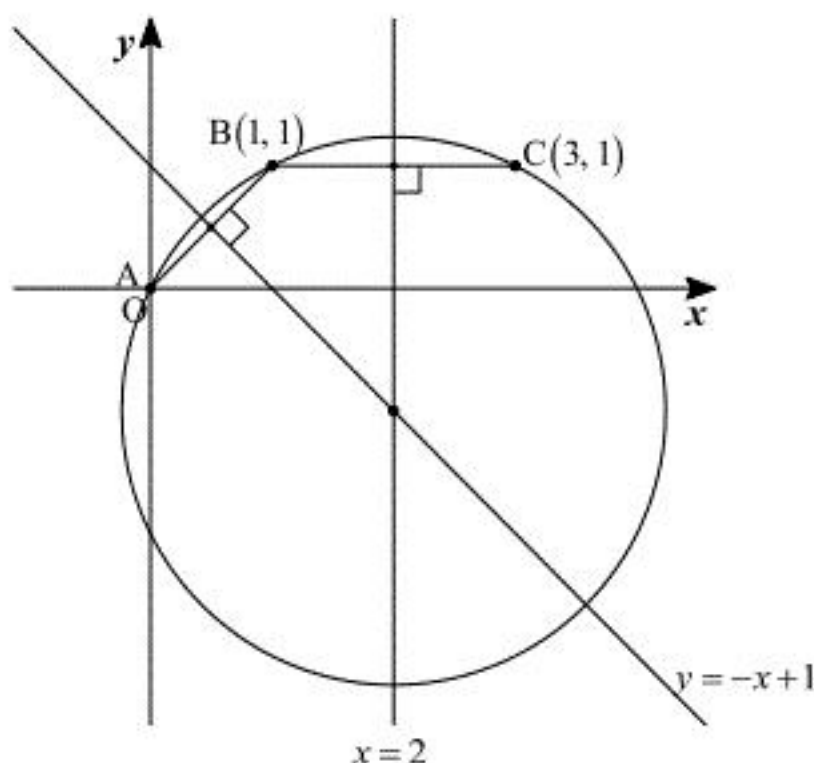
円の中心は、線分ABと線分BCのそれぞれの垂直二等分線の交点である。線分BCの垂直二等分線の方程式は、 $x=2$ である。また、ABの中点は $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ であり、直線ABの傾きは1であるから、線分ABの垂直二等分線の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = -\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = -x + 1$$

である。よって、円の中心はこの直線と $x=2$ の交点で $(2, -1)$ である。半径は

$$\sqrt{(2-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{5}$$

となる。



(答) 中心： $(2, -1)$ ，半径： $\sqrt{5}$

(4)

$$\int_0^1 f(t) dt = k \quad (k \text{ は定数}) \quad \dots \textcircled{2}$$

とおくと

$$f(x) + \int_0^1 f(t) dt = x^2 - x \Leftrightarrow f(x) = x^2 - x - k \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。②に③を代入すると

$$\begin{aligned}\int_0^1 (t^2 - t - k) dt &= k \\ \Leftrightarrow \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - kt \right]_0^1 &= k \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - k &= k \\ \therefore k &= -\frac{1}{12}\end{aligned}$$

となる。③に代入して、 $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{12}$ と求まる。

(答) $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{12}$

Ⅱ

(1)(i)

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 2\cos 3\theta + 9\cos^2 \theta - 7 \\ &= 2(4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) + 9\cos^2 \theta - 7 \\ &= 8\cos^3 \theta + 9\cos^2 \theta - 6\cos \theta - 7 \end{aligned}$$

である。 $t = \cos \theta$ とおくと、 $0 \leq \theta < 2\pi$ より $-1 \leq t \leq 1$ であり、

$$f(\theta) = 8t^3 + 9t^2 - 6t - 7$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(\theta) = 8t^3 + 9t^2 - 6t - 7$$

(ii)

$g(t) = 8t^3 + 9t^2 - 6t - 7$ とおくと、

$$\begin{aligned} g'(t) &= 24t^2 + 18t - 6 \\ &= 6(4t^2 + 3t - 1) \\ &= 6(4t - 1)(t + 1) \end{aligned}$$

である。よって $-1 \leq t \leq 1$ における $g(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$	4

よって、 $g(t)$ の最小値は $g\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{125}{16}$ であり、最大値は $g(1) = 4$ である。したがって、 $f(\theta)$

の最大値は 4 、最小値は $-\frac{125}{16}$ である。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値：} 4, \text{ 最小値：} -\frac{125}{16}$$

(2)

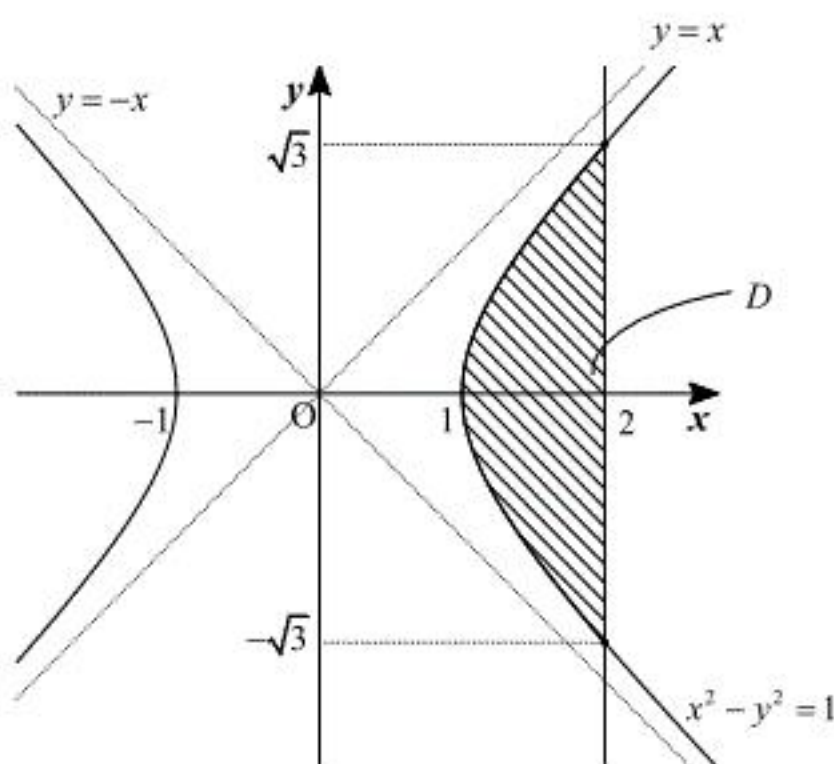
(i)

双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ と直線 $x = 2$ との交点の座標は、

$$2^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

より、 $(2, \pm\sqrt{3})$ である。また双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ は $x \rightarrow \pm\infty$ で $y = \pm x$ に漸近することに注意し

て図示すると、双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ と直線 $x = 2$ で囲まれた領域は下図の斜線部分になる。



(答) 前図

(ii)

D は x 軸に対称な図形であるから、 D を x 軸まわりに回転してできる立体は、 D の $y \geq 0$ における部分を x 軸のまわりに回転してできる立体と同じである。よって、求める立体の体積は、

$$\begin{aligned} \int_1^2 \pi y^2 dx &= \pi \int_1^2 (x^2 - 1) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_1^2 \\ &= \frac{4}{3} \pi \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{4}{3} \pi$$

Ⅲ

(1)

被積分関数を部分分数分解して式変形することで、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{4-x^2} &= \int_0^1 \frac{1}{(2+x)(2-x)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} [\log|2+x| - \log|2-x|]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \log 3\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \int_0^1 \frac{dx}{4-x^2} = \frac{1}{4} \log 3$$

(2)(i)

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{3}{7} \right)^k - \left(\frac{2}{7} \right)^k \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{7} \right)^k - \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{7} \right)^k \\ &= \frac{3}{7} \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{7} \right)^n}{1 - \frac{3}{7}} - \frac{2}{7} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{7} \right)^n}{1 - \frac{2}{7}} \\ &= \frac{7}{20} - \frac{3}{4} \left(\frac{3}{7} \right)^n + \frac{2}{5} \left(\frac{2}{7} \right)^n\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) S_n = \frac{7}{20} - \frac{3}{4} \left(\frac{3}{7} \right)^n + \frac{2}{5} \left(\frac{2}{7} \right)^n$$

(ii)

$0 < \frac{3}{7} < 1, 0 < \frac{2}{7} < 1$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{7} \right)^n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{7} \right)^n = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{7}{20}$$

である。

$$(\text{答}) \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{7}{20}$$

(3)

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) とおくと、ド・モアブルの定理から、

$$z^3 = r^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

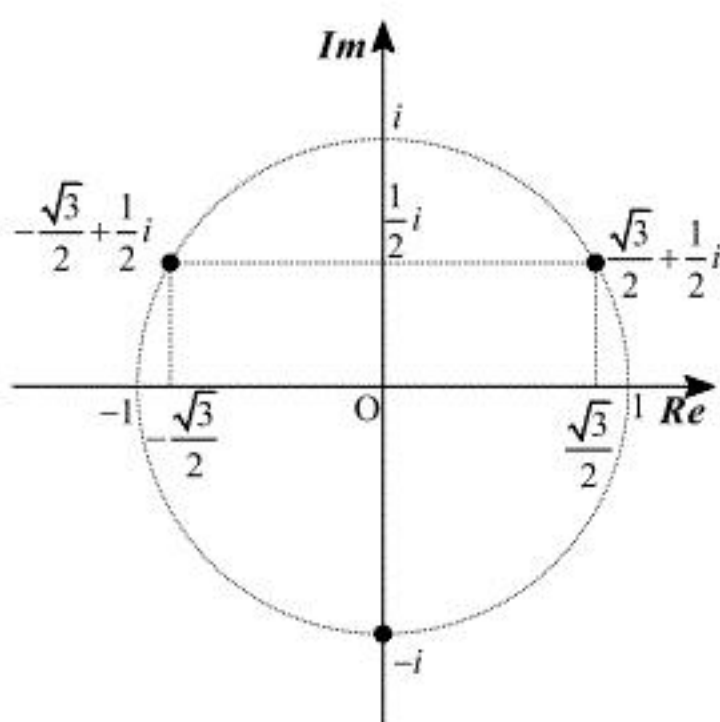
である。 $z^3 = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ より、 n を整数として

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} &= r^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}n\pi \end{cases}\end{aligned}$$

が成り立つ。 $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たすのは、 $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$ であるから、 $z^3 = i$ の解は、

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i$$

である。これを複素数平面上に図示すると下図のようになる。



$$(\text{答}) z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i, \text{ 複素数平面は前図}$$

IV

(1)(i)

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

より

$$\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

である。

(答) $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

(ii)

Oは△ABCの外心であるから、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$ が成り立つ。また、

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} + \vec{c} \\ \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= -|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。したがって、直線ADと直線BCは直交する。

(証明終)

(2)(i)

関数 $f(x) = xe^{2x}$ の導関数および第二次導関数は、

$$f'(x) = 1 \cdot e^{2x} + x \cdot 2e^{2x} = (1 + 2x)e^{2x}$$

$$f''(x) = 2 \cdot e^{2x} + (1 + 2x) \cdot 2e^{2x} = 4(1 + x)e^{2x}$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

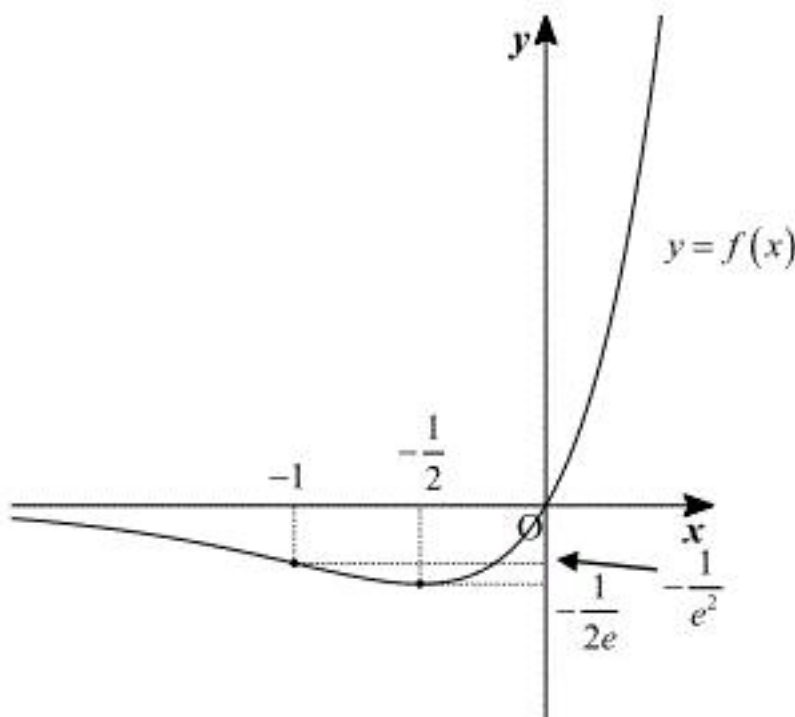
x	...	-1	...	$-\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+
$f(x)$	↘	変曲点	↘	極小	↗

よって、極値は、 $x = -\frac{1}{2}$ で極小値 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}$ をとる。また $f(-1) = -\frac{1}{e^2}$ より変曲点の座標は $\left(-1, -\frac{1}{e^2}\right)$ である。

(答) 極値： $-\frac{1}{2e}$ ，変曲点： $\left(-1, -\frac{1}{e^2}\right)$

(ii)

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 0$ より、 $y = f(x)$ のグラフの概形は以下のようになる。



(答) 前図

(iii)

(i)の結果より $t = -1$ であるから、

$$\begin{aligned} \int_t^0 f(x) dx &= \int_{-1}^0 xe^{2x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} xe^{2x} \right]_{-1}^0 - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{4} \left[e^{2x} \right]_{-1}^0 = \frac{3}{4} e^{-2} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\int_t^0 f(x) dx = \frac{3}{4} e^{-2} - \frac{1}{4}$

(1)

$$a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1 \text{ より,}$$

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (2k-1) = \frac{1}{n} \left\{ 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - n \right\} = n$$

である。

(答) $b_n = n$

(2)

$\{a_n\}$ が初項 a 、公差 d の等差数列であるとする。すると a_n の一般項は、

$$a_n = a + d(n-1) = a - d + dn$$

と表せる。よって、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (a - d + dk) \\ &= \frac{1}{n} \left\{ (a-d)n + \frac{1}{2} \cdot d \cdot n(n+1) \right\} \\ &= a + \frac{d}{2}(n+1) \end{aligned}$$

である。これは、 $\{b_n\}$ が初項 a 、公差 $\frac{1}{2}d$ の等差数列であることを示している。したがって

$\{a_n\}$ が等差数列であるとき $\{b_n\}$ も等差数列になる。

(証明終)

(3)

$\{b_n\}$ が初項 b 、公差 e の等差数列であるとする。すると b_n の一般項は、

$$b_n = b + e(n-1) = b - e + en$$

と表せる。ここで

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_k &= nb_n = (b-e)n + en^2 \end{aligned}$$

であるから、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= \{(b-e)n + en^2\} - \{(b-e)(n-1) + e(n-1)^2\} \\ &= b + 2e(n-1) \end{aligned}$$

である。また $n=1$ のとき、 $a_1 = b_1 = b$ であるから、これは $n=1$ のときも成立する。したがって一般項 $a_n = b + 2e(n-1)$ であるから、 $\{a_n\}$ は初項 b 、公差 $2e$ の等差数列であることがわかる。以上より $\{b_n\}$ が等差数列であるとき $\{a_n\}$ も等差数列になる。

(証明終)