

I

(1)
不等式

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} < \left(\frac{1}{16}\right)^x$$

について、 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} > 0$ 、 $\left(\frac{1}{16}\right)^x > 0$ であるから、両辺に底2の対数をとると、

$$\begin{aligned} x^2 \log_2 \frac{1}{2} &< x \log_2 \frac{1}{16} \\ \Leftrightarrow -x^2 &< -4x \\ \Leftrightarrow x(x-4) &> 0 \\ \therefore x < 0, x > 4 \end{aligned}$$

となる。
(答) $x < 0, x > 4$

(2)

$$\begin{aligned} z^4 &= 1 \\ \Leftrightarrow z^4 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (z^2 + 1)(z^2 - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (z + i)(z - i)(z + 1)(z - 1) &= 0 \\ \therefore z &= \pm i, \pm 1 \end{aligned}$$

である。
(答) $z = \pm i, \pm 1$

(3)

$$\begin{aligned} y = \frac{\log_e x}{x^3} \text{を微分すると,} \\ y' &= \frac{x^3 \cdot \frac{1}{x} - 3x^2 \log_e x}{(x^3)^2} \\ &= \frac{1 - 3 \log_e x}{x^4} \end{aligned}$$

となる。
(答) $y' = \frac{1 - 3 \log_e x}{x^4}$

(4)

和積の公式より、

$$\begin{aligned} \sin 3\theta + \sin 5\theta &= \sin(4\theta - \theta) + \sin(4\theta + \theta) \\ &= 2 \sin 4\theta \cos \theta \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \sin 3\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \sin 4\theta \cos \theta + \sin 4\theta &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin 4\theta \left(\cos \theta + \frac{1}{2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin 4\theta = 0 \text{ または } \cos \theta &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \theta = 0, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{2}{3}\pi$$

である。よって方程式の解は、 $\theta = 0, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi$ となる。
(答) $\theta = 0, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi$

(1)

整式 $A(x)$, $B(x)$ を $x^2 - 1$ で割った商をそれぞれ $P(x)$, $Q(x)$ とおくと,

$$A(x) = (x^2 - 1)P(x) + ax + b \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$B(x) = (x^2 - 1)Q(x) + cx + d \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。よって,

$$A(x) + B(x) = (x^2 - 1)\{P(x) + Q(x)\} + (a + c)x + b + d$$

となるから, $A(x) + B(x)$ を $x^2 - 1$ で割った余りは $(a + c)x + b + d$ となる。

(答) $(a + c)x + b + d$

(2)

①, ②より,

$$\begin{aligned} & A(x) \cdot B(x) \\ &= \{P(x) \cdot Q(x)(x^2 - 1) + P(x)(cx + d) + Q(x)(ax + b)\}(x^2 - 1) + acx^2 + (ad + bc)x + bd \\ &= \{P(x) \cdot Q(x)(x^2 - 1) + P(x)(cx + d) + Q(x)(ax + b) + ac\}(x^2 - 1) + (ad + bc)x + ac + bd \end{aligned}$$

となるから, $A(x) \cdot B(x)$ を $x^2 - 1$ で割った余りは $(ad + bc)x + ac + bd$ となる。

(答) $(ad + bc)x + ac + bd$

(3)

①式と剰余の定理より, $A(x)$ を $x - 1$ で割った余りは,

$$A(1) = a + b$$

となる。

(答) $a + b$

(4)

①, ②式と剰余の定理より, $A(x) \cdot B(x)$ を $x - 1$ で割った余りは,

$$A(1) \cdot B(1) = (a + b)(c + d)$$

となる。

(答) $(a + b)(c + d)$

III

(1)

$f(x) = ae^{-bx}$ に関して、 $a > 0, b > 0$ であるから、

$$f(x) > 0$$

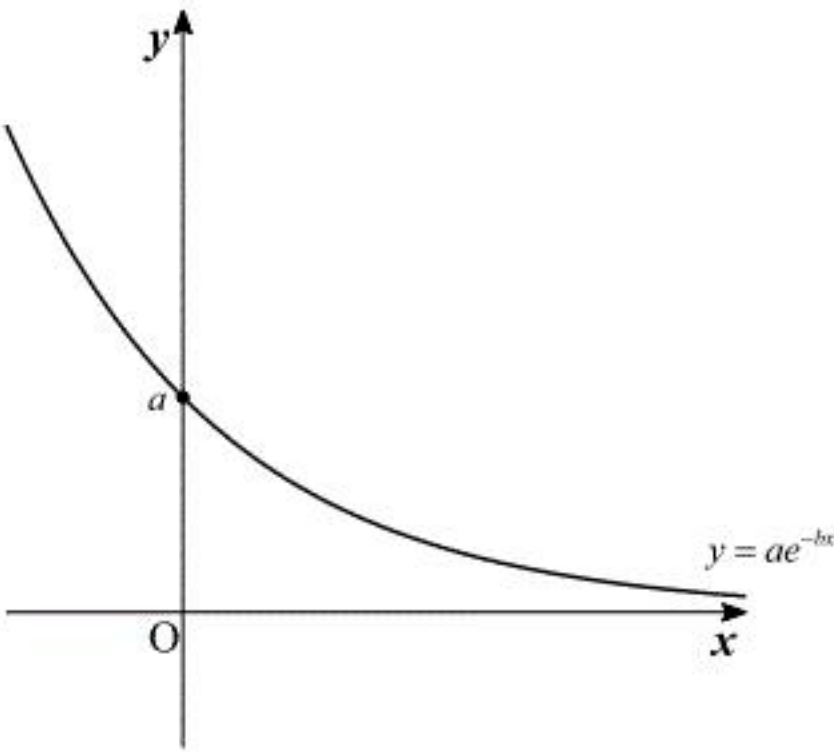
であり、また、

$$f'(x) = -abe^{-bx} < 0$$

である。よって $f(x)$ は単調減少する。さらに、

$$f''(x) = ab^2e^{-bx} > 0$$

であるから、 $y = f(x)$ のグラフは下に凸である。また $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ である。以上より、グラフの概形は下図のようになる。



(答) 前図

(2)

$a > 0, b > 0$ であり、また $e^{-bx} > 0$ であるから、

$$f(x) = \frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow ae^{-bx} = \frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{-bx} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -bx = -\log_e 2$$

$$\therefore x = \frac{\log_e 2}{b}$$

と求まる。

(答) $x = \frac{\log_e 2}{b}$

(3)

$$\begin{aligned} \int_0^K f(x) dx &= \int_0^K ae^{-bx} dx \\ &= \left[-\frac{a}{b} e^{-bx} \right]_0^K \\ &= \frac{a}{b} (1 - e^{-bK}) \end{aligned}$$

である。

(答) $\int_0^K f(x) dx = \frac{a}{b} (1 - e^{-bK})$

(4)

(3)より、

$$\begin{aligned} S(L) &= \int_0^{\log_e L} f(x) dx \\ &= \frac{a}{b} (1 - e^{-b \log_e L}) \\ &= \frac{a}{b} (1 - L^{-b}) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $b > 0$ であるから、 $\lim_{L \rightarrow \infty} L^{-b} = 0$ である。ゆえに、

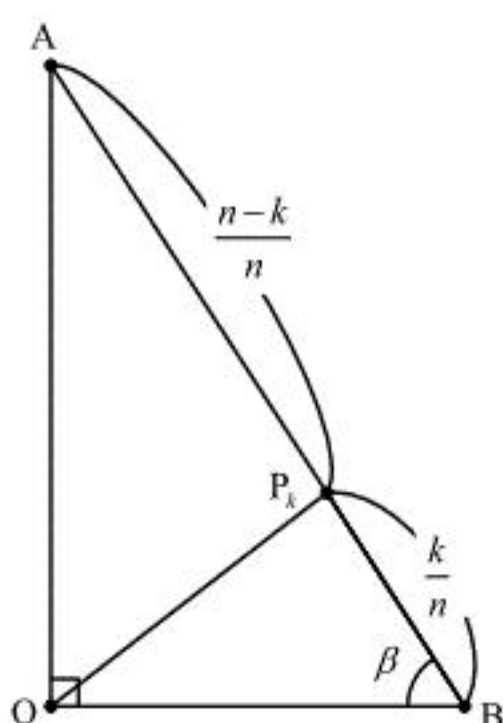
$$\lim_{L \rightarrow \infty} S(L) = \frac{a}{b}$$

となる。

(答) $\lim_{L \rightarrow \infty} S(L) = \frac{a}{b}$

IV

(1)



$\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ より, $\cos \beta = \frac{BO}{AB}$ であり, $AB = 1$ であることから,

$$BO = \cos \beta$$

$$\therefore |\overline{OB}| = \cos \beta$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |\overline{OB}| = \cos \beta$$

(2)

点 P_k は線分 BA を $k:(n-k)$ に内分する点であるから,

$$\overline{OP_k} = \frac{k}{n} \overline{OA} + \frac{n-k}{n} \overline{OB}$$

となる。ここで, $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ より, $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$ であり, (1) より, $|\overline{OB}| = \cos \beta$ である。また, (1)

と同様に考えて, $|\overline{OA}| = \sin \beta$ であるから,

$$\begin{aligned} |\overline{OP_k}|^2 &= \left(\frac{k}{n}\right)^2 |\overline{OA}|^2 + \frac{2k(n-k)}{n^2} \overline{OA} \cdot \overline{OB} + \left(\frac{n-k}{n}\right)^2 |\overline{OB}|^2 \\ &= \frac{k^2}{n^2} \sin^2 \beta + \frac{(n-k)^2}{n^2} \cos^2 \beta \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |\overline{OP_k}|^2 = \frac{k^2}{n^2} \sin^2 \beta + \frac{(n-k)^2}{n^2} \cos^2 \beta$$

(3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} |\overline{OP_k}|^2 &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^2} \sin^2 \beta + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)^2}{n^2} \cos^2 \beta \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^2} \sin^2 \beta + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^2} \cos^2 \beta \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^2} (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^2} \\ &= \frac{\frac{1}{6}(n-1)(n-1+1)(2n-2+1)}{n^2} \\ &= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=1}^{n-1} |\overline{OP_k}|^2 = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n}$$

(4)

(3) より,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} |\overline{OP_k}|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{6n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{2n}}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} |\overline{OP_k}|^2 = \frac{1}{3}$$